目　　录

第三章　准静态(电磁)场

第四章　迅变(电磁)场

第一章　静电学和静磁学

§1. 库仑定律

我们假定读者已经由实验物理学熟悉了导体和绝缘体的概念。我们想在这几节中只考察其线度远小于它们的相对间距的那些带电体。于是，我们可以假定它们的电荷集中在某些点上（点电荷）。

这样的两个点电荷间的力是有心力，并且满足作用和反作用原理(作用＝反作用)。这种力既可能是引力，也可能是斥力，它们的量值由下式给出

$$K=\frac{|e_1\cdot e_2|}{r^2},$$

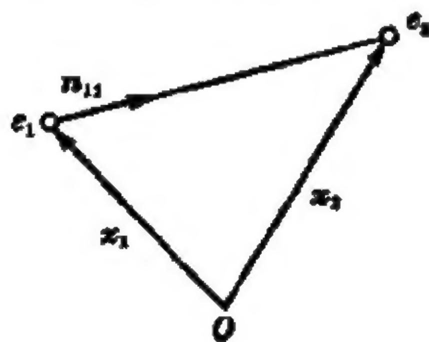


图 1.1

式中 e_1 和 e_2 是电荷的电量，而 r 是它们的间距。用矢量表示法(图 1.1)，电荷 e_1 作用在电荷 e_2 上的力为

$$\mathbf{K}_{12}=\frac{e_1e_2}{r_{12}^2}n_{12}=\frac{e_1e_2}{r_{12}^3}(x_2-x_1)=-e_1e_2\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{r_{12}}, \quad [1.1]$$

式中 x_1 与 x_2 为 e_1 和 e_2 的位矢，$r_{12}=|x_2-x_1|$ 为 e_1 与 e_2 的间距，$n_{12}=(x_2-x_1)/r_{12}$ 为由 e_1 指向 e_2 的单位矢。这一从经验获得的关系称为库仑定律。

我们还必须附加由实验推论出来的另外两个事实：

1. 力的叠加。 电力按矢量加法定律(平行四边形法则)相加

$$K_{1+2,3}=K_{1,3}+K_{2,3}.$$

2. 电荷守恒. 既不能产生也不能消灭的电荷，按代数加法相加。

由于库仑定律中的各个量都可以改变，因而库仑定律本身就内含地对电荷提供了一个充分的定义。

例如，我们定义：(*a*) 倘若二电荷中的每一电荷对第三个电荷产生相同的效应，则此二电荷相等；(*b*) 如果电荷 e_1 对第三个电荷 e_3 产生的效应同两个电量皆为 e_2 的电荷对 e_3 所产生的效应相同，则电荷 e_1 是电荷 e_2 的两倍。当然，这两个电荷(e_2)间的距离必须远小于它们同 e_3 间的距离。电荷既可能是正的，也可能是负的。同号电荷相斥，异号电荷相吸。

我们也可以考察一个确定的电荷 e_1 作用在不同的电荷 e_2 上的各个力，反之亦然。这两种情况构成了电场强度定义的基础：对一给定的 e_1，其作用在检验电荷 e_2 上的力为

$$\boldsymbol{K}_2=e_2\boldsymbol{E}. \qquad [1.2]$$

式中电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与 e_2 无关。

在由位于 Q 点的单个点电荷 e_Q 所产生的电场中，P 点的电场强度由库仑定律给出：

$$\boldsymbol{E}_P=\frac{e_Q}{r_{QP}^2}\boldsymbol{n}_{QP}=\frac{e_Q}{r_{QP}^3}(\boldsymbol{x}_P-\boldsymbol{x}_Q)=-e_Q\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_P}\frac{1}{r_{QP}}, \qquad [1.3]$$

式中源点 Q 是固定的，而场点 P 则是任意的。对于几个点电荷的情况，根据叠加原理求得

$$\boldsymbol{E}_P=\sum_Q\frac{e_Q}{r_{QP}^2}\boldsymbol{n}_{QP}=\sum_Q\frac{e_Q}{r_{QP}^3}(\boldsymbol{x}_P-\boldsymbol{x}_Q)=-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_P}\sum_Q\frac{e_Q}{r_{QP}}. \qquad [1.4]$$

在任意电荷分布的普遍情况下，电场强度也由下式定义

$$\boldsymbol{K}=e\boldsymbol{E}. \qquad [1.5]$$

式中 $\boldsymbol{K}$ 为作用在检验体上的力；e 为检验体所带的电量，它只与检

验体本身有关；E 为电场强度，与检验体无关，而只取决于场。

很重要的一点是，我们必须假定检验电荷的存在对场并无干扰，或对场的影响小得可以略去。在宏观静电学中这并不产生困难，因为实际上可以使检验电荷的电量 e 任意地小。再者，在场源是固定的点电荷或准点电荷的情况中，e 甚至可能是任意地大。另一方面，如果场源是扩展的带电导体表面，那么大电量的检验电荷会引起场源电荷的位移，从而改变了电场(参见§11)。同宏观静电学相反，在原子范畴中却遇到巨大的困难。在此，由于不能使检验电荷任意微小，加之场源不是静止的，所以不能忽略检验电荷对场的反作用。这表明在场的概念中有一定的困难[A-1]。

到此为止，我们都是用粒子物理学的语言来描述电场。在以后几节中，我们要把由库仑定律所定义的电场看作一个独立的概念，并研究它的性质。

§2. 点电荷的场

a. 场是保守的(能量守恒)

从矢量分析知道，这一性质可以由以下四个完全等效的表达式中的任一个来表示：

1. 对任意闭合曲线有

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}=0. \qquad [2.1]$$



图 2.1

其物理意义为

$$e\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}=\oint \boldsymbol{K}\cdot d\boldsymbol{s}=0,$$

即，当带电粒子在电场中沿一个闭合路径运动一周时，既不获得、也不损耗净功。

2. $\int_O^P \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}$ 只取决于两端点 O 和 P 的位置(图 2.1)，而与它

们之间的路径无关。由此不难证明这一积分必定具有如下形式

$$\int_O^P \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = -\varphi_P + \varphi_O. \qquad [2.2]$$

证明：我们定义$\int_O^P \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = F(O, P)$。于是，对于任一点 P'，有

$$F(O, P') + F(P', P) = F(O, P)$$

或

$$F(O, P') - F(P, P') = F(O, P),$$

这是由于，显然有 $F(P', P) = -F(P, P')$。若保持 P' 固定，则

$$F(O, P') = \varphi_O \quad 及 \quad F(P, P') = \varphi_P.$$

所以

$$\varphi_O - \varphi_P = F(O, P),$$

这就是所欲求的结果。

量 φ_P 称为 P 点的**静电势**。它只被确定到相差一任意附加常数。(势的零点可任意选择。)

3. $\boldsymbol{E} = -\text{grad}\varphi.$ [2.3]

或者表示为

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi;\quad \boldsymbol{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{x}};\quad E_i = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_i},\quad i = 1, 2, 3.$$

4. $\text{rot}\boldsymbol{E} = 0.$ [2.4]

场是无旋的。或者表示为

$$\text{curl}\boldsymbol{E} = 0;\quad \nabla\times\boldsymbol{E} = 0;$$

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_j} - \frac{\partial E_j}{\partial x_i} = 0,\quad i, j \text{ 循环。}$$

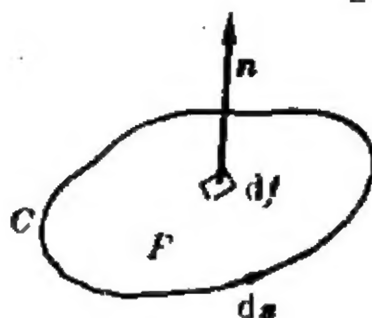


图 2.2

根据**斯托克斯定理**：

$$\int_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_F \text{curl}\boldsymbol{E}\cdot \boldsymbol{n} df \qquad [2.5]$$

(在右手坐标系中，式中的法线方向与 C 的绕行指向必须保持如图 2.2 所示的关系)，表述 4 与能量定律的其他三种形式是等效的。

从上面四种表述中的任一种都可导出其他三种。可以证明，它们对任何有心力都成立。因此，它们对有心力的有限和也成立，从而对于点电荷系的场也是成立的。

由点电荷系所产生的电势为

$$\varphi_P = \sum_Q \frac{e_Q}{r_{QP}}. \tag{2.6}$$

此处，我们已经选定了任意附加常数，使得 $\varphi(\infty)=0$。φ 的这一表达式的正确性能够通过构成它的梯度

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}_P \varphi = \sum_Q \frac{e_Q}{r_{QP}^3}(\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_Q)$$

来证明。(微分是对 P 的坐标施行的；场源保持固定。)

由于表述1, 2, 3和 4 对任意势场都是成立的，所以它们对电场 $\boldsymbol{E}$ 所能提供的论述比库仑定律所能作出的要少得多。只当把它们同下述定律结合在一起时，它们才与库仑定律等效。

b. 电通量．高斯定律

1. 单个点电荷。通过以点源为球心的球面的电通量 (图 2.3) 为

$$\oint_K E_n \mathrm{d}f = \int_K \frac{e}{r^2} r^2 \mathrm{d}\Omega = 4\pi e.$$

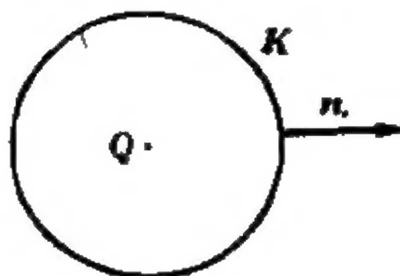


图 2.3

对所有球面，不论其大小如何，通量都相同。推广到任意闭曲面，不难看出

$$\oint_F E_n \mathrm{d}f = -\oint_F \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}f = \begin{cases} 4\pi e, & \text{若 } Q \text{ 位于曲面 } F \text{ 之内}, \\ 0, & \text{若 } Q \text{ 位于曲面 } F \text{ 之外}。\end{cases} \tag{2.7}$$

2. **多个点电荷**. 在这种情况中，

$$\oint_F E_n \mathrm{d}f = -\oint_F \frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}f = 4\pi\sum_Q e_Q. \qquad [2.8]$$

式中的和是对包含在曲面 F 之内的全部电荷取的。

根据高斯定理

$$\oint_F E_n \mathrm{d}f = \oint_F \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}f = \int_V \mathrm{div}\boldsymbol{E}\mathrm{d}V \qquad [2.9]$$

(式中 F 为包围体积 V 的闭曲面，而 $\boldsymbol{n}$ 为外法线)，由[2.7]和[2.8]两式得

$$\mathrm{div}_P\boldsymbol{E} = 0, \qquad P\neq Q. \qquad [2.10]$$

由于 $\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\varphi$ 以及

$$\mathrm{divgrad}\varphi = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\varphi,$$

所以 φ 满足拉普拉斯方程

$$\nabla_P^2\varphi = 0, \qquad P\neq Q. \qquad [2.11]$$

因为除在原点外，

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}; \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{x_i}{r^3}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3x_i^2-r^2}{r^5},$$

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \sum_i\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3r^2-3r^2}{r^5} = 0,$$

立刻可以看出 $\varphi = e/r$ (对于单个点电荷) 或 $\varphi = \sum_Q e_Q/r_{QP}$ (对于多个点电荷)是方程式[2.11]的解。对于包围原点的曲面，

$$-\oint_F \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}f = \oint_F \frac{1}{r^2}\left(\boldsymbol{n}\cdot\frac{\boldsymbol{x}}{r}\right)\mathrm{d}f = 4\pi.$$

能量守恒

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{E} = 0 \text{ 或 } \boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\varphi,$$

和高斯定律

$$\oint_F E_n \mathrm{d}f = 4\pi \sum_Q e_Q \text{ 或 } -\oint_F \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}f = 4\pi \sum_Q e_Q,$$

(Q 在 F 内)合在一起完全等效于点电荷的库仑定律。

关于斯托克斯定理和高斯定理的数学注记

就斯托克斯定理而言，法线 $\boldsymbol{n}$ 的方向和曲线 C 的绕行指向之间有一个确定的关系。只当把 $\mathrm{curl}\boldsymbol{E}$ 和面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ 都看作矢量时，这个规定才是必要的。然而，把它们看作反对称张量① 则更为合适。这一点通过坐标系的反演便可看出。然而，对于三维空间中的任一反对称张量

$$C_{ik} = A_i B_k - A_k B_i = -C_{ki}$$

(A_i 和 B_i 应该象矢量的分量那样变换)，借助于对全部三个指标是反对称的张量 e_{ikl}:

$$e_{ikl} = \begin{cases} \pm 1 & \text{若 } ikl \text{ 为 } 1, 2, 3 \text{ 的} \begin{pmatrix}\text{偶次}\\ \text{奇次}\end{pmatrix} \text{置换}, \\ 0 & \text{若三个指标中至少有两个相等}, \end{cases}$$

能够给定一个矢量 C_i，即

$$C_i = \sum_{k<l} e_{ikl} C_{kl}.$$

于是，在能够通过原坐标系的真旋转(即，其旋转矩阵的行列式等于 +1)导出的所有坐标系中，矢量的分量 C_1, C_2 和 C_3 分别等于张量的分量 C_{23}; C_{31} 和 C_{12}. 若施行反射旋转 (其行列式等于 −1)，则将改变符号。例如，

$$x'_i = -x_i \qquad (i=1, 2, 3),$$

$$C'_{kl} = C_{kl}, \text{但} \quad C'_i = -C_i.$$

从反演的观点来看，旋度和面元都可以看作反对称张量(矢量

① 关于张量的概念，参见 §18。

积)。于是,可以写出

$$\oint E\cdot \mathrm{d}s=\sum_{i<k}\int \mathrm{curl}_{ik} E \mathrm{d}f_{ik}. \qquad [2.12]$$

因此,法线方向与绕行指向间的规定关系就没有必要了。确实,法线的概念不再出现。这种形式的斯托克斯定理在任意 n 维空间中都是成立的。这一极其普遍的定理是纯粹拓扑性质的;即,它与任何度规无关。只需要 E_i 相对于 $\mathrm{d}x^i$ 逆步地变换,即

$$E\cdot \mathrm{d}s=\sum E_i \mathrm{d}x^i=\text{不变量}.$$

总可以把闭曲面想象为由具有共同边界的两个不同的曲面所构成。若将[2.12]式应用于这两个曲面上,则沿边界曲线的线积分相互抵消,从而对于闭合曲面有

$$\sum_{i<k}\oint \mathrm{curl}_{ik} E \mathrm{d}f_{ik}=0.$$

证明斯托克斯定理的最简易方式是:首先对矩形证明它,然后证明在任意坐标变换下该定理是不变的。因此,对于能够变换为矩形的所有曲面,它必然都是正确的。对于多连通域的情况,通过适当的切割,把它分割为单连通域,然后将该定理应用于其中每一单连通域。由于沿割线的线积分成对地抵消,因此这一定理对多连通域也是成立的。

由矢量 A_i 和反对称张量 $C_{ik}=-C_{ki}$ 能构成张量

$$A_i C_{kl}+A_k C_{li}+A_l C_{ik}=D_{ikl}.$$

由于 D_{ikl} 对三个指标都是反对称的,所以总能把它写成如下形式

$$D_{ikl}=\varepsilon_{ikl} D.$$

在高斯定理中,通过下式的写法:

$$\oint_F \left(E_i \mathrm{d}f_{kl}+E_k \mathrm{d}f_{li}+E_l \mathrm{d}f_{ik}\right)$$
$$=\int_V \mathrm{div} E(\mathrm{d}V)_{ikl}=\int_V \mathrm{div} E|\mathrm{d}V|\varepsilon_{ikl}, \quad [2.13]$$

就能够排除法向分量的概念。可以看出，高斯定理也具有拓扑特性。由于 $\mathrm{div}E$ 是标量，所以象等式右端一样，等式左端也按行列式变换。象斯托克斯定理那样，高斯定理既不局限于三维空间，也不受度规概念的限制。

与斯托克斯定理的证明相似，高斯定理的最简易证法为：先对立方体证明其正确性，然后证明在任意坐标变换下该定理不变，等等。

§3. 体电荷和面电荷

想象电荷是连续分布的，而不是由一系列点电荷所组成，则往往较为方便。只要我们局限在宏观物理学的领域中，则总可以忽略实际上电的原子性结构。

a. 体电荷

对于包含在体积 V 中的电荷，我们设想实施如下的极限程序：

$$\begin{cases}\text{电荷数}\to\infty\\ \text{每一个别电荷的电量}\to 0,\end{cases}$$

来使总电荷保持恒定。如此，则

$$\sum_Q e_Q \longrightarrow e=\int_V \rho\,\mathrm{d}V \qquad (V\text{中的总电荷})。$$

这样定义的连续函数 $\rho=\lim\limits_{V\to 0}(e/V)$ 称为体电荷密度。于是[2.6]式的电势 φ_P 和[1.4]式的电场强度 E_P 变为

$$\varphi_P=\int\frac{\rho_Q}{r_{QP}}\mathrm{d}V_Q, \qquad [3.1]$$

$$E_P=-\mathrm{grad}_P\varphi_P=\int\frac{\rho_Q}{r^3_{QP}}(x_P-x_Q)\mathrm{d}V_Q. \qquad [3.2]$$

在这两个积分中，同点电荷累加时所发生的情况相反，当 P 点趋于 Q 时，不存在奇点。很粗略地讲，被积函数 ρ_Q/r_{QP} 和

$\rho_Q(\boldsymbol{x}_P-\boldsymbol{x}_Q)/r_{QP}^3$ 变为无穷大比体积元 dV 趋于零慢得多。通过对极限的精密考虑，不难证明这是严格正确的。因此，对于电荷的连续体分布，$\boldsymbol{E}$ 和 φ 在场源区域内部是正规的。

关于体电荷的情况，高斯定律变为

$$-\oint_F \frac{\partial\varphi}{\partial n} df=\oint_F E_n df=4\pi\int_V \rho dV. \qquad [3.3]$$

由于被积函数的正规性，利用高斯定理([2.9]式)，上式可改写为

$$-\int_V \nabla^2\varphi dV=\int_V \operatorname{div}\boldsymbol{E}dV=4\pi\int_V \rho dV.$$

因为对任意体积 V，特别是对任意小的体积，上式都成立，于是有

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=4\pi\rho \qquad [3.4]$$

或

$$-\nabla^2\varphi=4\pi\rho. \qquad [3.5]$$

[3.5]式称为泊松方程，它是拉普拉斯方程([2.11]式)的推广。

b. 面电荷

对于二维曲面，可以设想一个完全类似用于体电荷的方法。如此，则得到面电荷密度 ω 的概念。类似地，有

$$e=\int_F \omega df(\text{曲面上的总电荷}),$$

$$\varphi_P=\int\frac{\omega_Q}{r_{QP}}df_Q, \qquad [3.6]$$

$$\boldsymbol{E}_P=-\operatorname{grad}_P\varphi=\int\frac{\omega_Q}{r_{QP}^3}(\boldsymbol{x}_P-\boldsymbol{x}_Q)df_Q. \qquad [3.7]$$

当场点 P 在曲面上时，φ 仍为有限（被积函数 $\sim 1/r$，面元 $\sim r^2$）。因此，经过带电面时 φ 是连续的。

另一方面，电场强度垂直于曲面的分量却是不连续的。将高斯定理（[2.9]式）应用于包含一部分带电面的假想柱面(如图3.1所示)，就可看出这一点：

$$\oint E_n df = 4\pi \int \omega df. \qquad [3.8]$$

在柱高趋于零而柱底保持不变的极限情况中，

$$\int (E_{n_1} + E_{n_2}) df = 4\pi \int \omega df.$$

由于底面积是任意的，所以有

$$E_{n_1} + E_{n_2} = 4\pi\omega. \qquad [3.9]$$

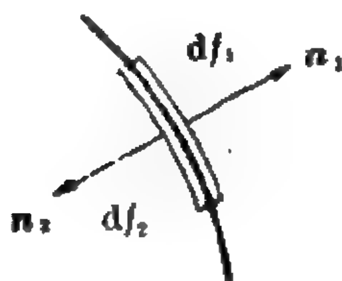


图 3.1

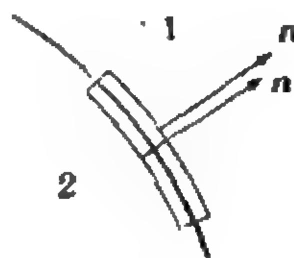


图 3.2

或者用法线的另一种定义(图 3.2)，则

$$(E_n)_1 - (E_n)_2 = 4\pi\omega,$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_1 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_2 = -4\pi\omega.$$

因此，经过带电面时 E 的法向分量是不连续的。另一方面，切向分量仍然是连续的。证明：φ 在曲面两侧是相等的。因此，不论在面内和面外，平行于曲面并在相同方向上的微分都必定给出相同的结果。也能用斯托克斯定理来进行证明。

在导体上电场的边界条件：导电体是具有可自由运动的电子的物质。导体内电场强度的分量引起电荷的位移——电流。无电流的条件，或场的静态特性的条件为

1. 导体内部不可能存在电场：

$$E = 0;$$

2. 在导体表面上，电场强度的切向分量为零:

$$E_t=0.$$

(由于切向分量是连续的，因此，正如在导体内部一样，在导体外部该切向分量也必定为零。)反之，由于可能存在表面电荷，导体外的法向分量一般地不等于零。因此，在导体内部电场强度 $\boldsymbol{E}$ 为零，而在导体外部电场强度则仅有法向分量

$$E_n=-\frac{\partial\varphi}{\partial n}=4\pi\omega.$$

电势的梯度垂直于表面。因此，沿表面 $\varphi=$常数。即表面为一等势面。

§4. 静电场的能量

a. 点电荷

点电荷系的(电)势能等于把这些电荷从无穷远带回到它们的实际位形所需作的功。对于相距 r_{12} 的两个电荷 e_1 和 e_2，此功为

$$E_{\text{pot}}=\frac{e_1e_2}{r_{12}}.$$

对于任意个数的点电荷，通过计算每对电荷的电势能，并对所有各对取和，求得

$$E_{\text{pot}}=\sum_{i<k}\frac{e_ie_k}{r_{ik}}.\qquad[4.1]$$

我们也可写成

$$E_{\text{pot}}=\frac{1}{2}\sum_{i,k}{}'\frac{e_ie_k}{r_{ik}}.\qquad[4.2]$$

取和符号上的“撇”表示不包含 $i=k$ 的那些项。从这个对称的表达式中可以看出，这样定义的能量与从无穷远带回点电荷的次序无关。

还有第三种形式的E_{pot}，其中用到了电势的概念。在第i个电荷的位置，由除它本身外的所有电荷产生的电势为

$$\varphi_i' = \sum_{\substack{k \\ (k\neq i)}}' \frac{e_k}{r_{ik}}. \qquad [4.3]$$

因而，

$$E_{pot} = \frac{1}{2}\sum_i e_i \varphi_i'. \qquad [4.4]$$

***b.* 体电荷**

在这种情况中

$$E_{pot} = \frac{1}{2}\iint \frac{\rho_P \rho_{P'}}{r_{PP'}} dV_P dV_{P'}. \qquad [4.5]$$

点电荷系中存在的$i\neq k$的复杂性这里并不出现，这是由于，在表达式$\int (\rho_{P'}/r_{PP'}) dV_{P'}$中，不论体积元是否包含$P$点在内都没有什么区别。

用电势来表示，则有

$$\varphi_P = \int \frac{\rho_{P'}}{r_{PP'}} dV_{P'}, \qquad [4.6]$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2}\int \rho_P \varphi_P dV_P. \qquad [4.7]$$

***c.* 体电荷和面电荷**

利用电势

$$\varphi_P = \int \frac{\rho_{P'}}{r_{PP'}} dV_{P'} + \int \frac{\omega_{P'}}{r_{PP'}} df_{P'} \text{([4.6]式+[3.6]式)},$$

得出

$$E_{pot} = \frac{1}{2}\int \rho_P \varphi_P dV_P + \frac{1}{2}\int \omega_P \varphi_P df_P. \qquad [4.8]$$

前一积分遍及包含体电荷分布的整个区域，后一积分遍及所有带

电面。若不明显地引入势的概念，则

$$E_{\text{pot}}=\frac{1}{2}\iint\frac{\rho_P\rho_{P'}}{r_{PP'}}\mathrm{d}V_P\mathrm{d}V_{P'}+\iint\frac{\rho_P\omega_{P'}}{r_{PP'}}\mathrm{d}V_P\mathrm{d}f_{P'}$$

$$+\frac{1}{2}\iint\frac{\omega_P\omega_{P'}}{r_{PP'}}\mathrm{d}f_P\mathrm{d}f_{P'} \qquad [4.9]$$

根据静电学定律，可将能量的这些表达式变换成遍及全部空间的积分。

首先，若仅有体电荷，则利用[3.4]式可得

$$E_{\text{pot}}=\frac{1}{2}\int\rho\varphi\mathrm{d}V=\frac{1}{8\pi}\int\varphi\,\mathrm{div}\boldsymbol{E}\mathrm{d}V.$$

此外，在矢量分析中有个熟知的恒等式(对任一矢量$\boldsymbol{E}$和任一标量函数φ都成立)

$$\mathrm{div}(\varphi\boldsymbol{E})=\varphi\,\mathrm{div}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{grad}\varphi, \qquad [4.10]$$

于是，若 $\mathrm{div}\boldsymbol{E}$ 在整个积分域中存在(从而，$\boldsymbol{E}$必须是连续的)，则高斯定理给出

$$\oint\varphi E_n\mathrm{d}f=\int\varphi\,\mathrm{div}\boldsymbol{E}\mathrm{d}V+\int\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{grad}\varphi\mathrm{d}V,$$

应用到我们的情况，于是得到

$$E_{\text{pot}}=\frac{1}{8\pi}\left\{-\int\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{grad}\varphi\mathrm{d}V+\oint_K\varphi E_n\mathrm{d}f\right\}.$$

我们设想一个球K作为积分域，而在极限情况下球的半径r趋于无穷大。现在我们假定，只是在有限的球内$\rho\neq0$，或者，在无穷远处ρ将充分快地趋于零，以致当$K\to\infty$时对球面K的第二个积分趋于零。(若只在有限的区域内$\rho\neq0$，则φ至少象$1/r$那样快地趋于零，而$|E|$至少象$1/r^2$那样快地趋于零。然而球面只是按r^2增加，从而整个面积分至少象$1/r$那样趋于零。)因为$\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}\varphi$，于是我们便得到著名的公式

$$E_{\text{pot}}=\frac{1}{8\pi}\int E^2\mathrm{d}V, \qquad [4.11]$$

式中能量只用空间一切点的电场强度来表达。量$E^2/8\pi$称为场的能量密度。

若也存在面电荷，由于在带电面上E是不连续的，高斯定理因而不能应用，所以必须把该面F排除在积分域之外。这将给出两个附加项：

$$\begin{aligned}E_{\text{pot}} &= \frac{1}{2}\int\rho\varphi\mathrm{d}V+\frac{1}{2}\int\omega\varphi\mathrm{d}f \\ &= \frac{1}{8\pi}\left\{-\int(\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{grad}\varphi)dV\right. \\ &\quad \left.+\oint_K\varphi E_n\mathrm{d}f+\oint_F\varphi E_n\mathrm{d}f\right\} \\ &\quad +\frac{1}{2}\int\omega\varphi\mathrm{d}f.\end{aligned}$$

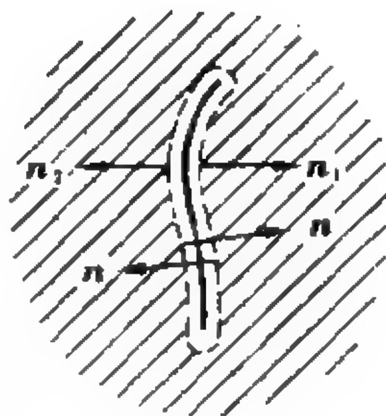


图 4.1

由于法线$\boldsymbol{n}$的指向应由积分域向外，即其指向与$\boldsymbol{n}_1$和$\boldsymbol{n}_2$相反(参见图 4.1)，所以两个附加项相互抵消。于是，

$$\frac{1}{8\pi}\oint_F\varphi E_n\mathrm{d}f=-\frac{1}{8\pi}\int\varphi(E_{n_1}+E_{n_2})\mathrm{d}f=-\frac{1}{2}\int\omega\varphi\mathrm{d}f,$$

若再假设当$K\to\infty$时对球面的积分等于零，则又得到

$$E_{\text{pot}}=\frac{1}{8\pi}\int E^2\mathrm{d}V. \qquad [4.11]$$

因此，这一公式对于体电荷和面电荷都成立。

另一方面，对于点电荷系这一积分是发散的。在这种情况中，必须把电场分解为由各个点电荷所产生的分量。点电荷e_k在P点产生的电势和电场强度为

$$\varphi_k(P)=\frac{e_k}{r_P},\ \boldsymbol{E}_k=-\mathrm{grad}\varphi_k.$$

现在我们来考察积分$\int\boldsymbol{E}_i\cdot\boldsymbol{E}_k\mathrm{d}V$，其中$i\neq k$。若把各个点电荷包围在小球$K_i$和$K_k$中而除去那些奇点，并鉴于在整个积分域中$\mathrm{div}\boldsymbol{E}$

$=0$，则由高斯定理得出

$$\int \boldsymbol{E}_i \cdot \boldsymbol{E}_k \mathrm{d}V = -\int \boldsymbol{E}_i \cdot \mathrm{grad}\varphi_k \mathrm{dV} = -\int \mathrm{div}(\varphi_k \boldsymbol{E}_i)\mathrm{dV} +$$

$$\int \varphi_k \mathrm{div}\boldsymbol{E}_i \mathrm{dV} = -\oint_{K(\text{大球})} E_{in}\varphi_k \mathrm{d}f - \oint_{K_i} E_{in}\varphi_k \mathrm{d}f - \oint_{K_k} E_{in}\varphi_k \mathrm{d}f.$$

当大球趋于无穷大时，第一项趋于零。当我们令 K_k 趋于零时，第三项趋于零。只有第二项不为零。当 $K_i \to 0$ 时，得出

$$\varphi_k \to \frac{e_k}{r_{ik}},$$

$$-E_{in} = \frac{e_i}{r_{ik}^2},$$

$$-\oint_{K_i} E_{in} \mathrm{d}f = 4\pi e_i.$$

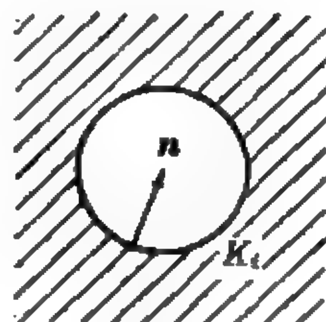


图 4.2

于是，

$$-\oint_{K_i} E_{in}\varphi_k \mathrm{d}f \to 4\pi \frac{e_i e_k}{r_{ik}}.$$

因此，对于两个点电荷，得到

$$E_{\mathrm{pot}} = \frac{e_i e_k}{r_{ik}} = \frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{E}_i \cdot \boldsymbol{E}_k \mathrm{d}V. \qquad [4.12]$$

式中积分遍及整个空间。

对于任意多个点电荷，我们有

$$E_{\mathrm{pot}} = \sum_{i<k} \frac{e_i e_k}{r_{ik}} = \frac{1}{4\pi}\sum_{i<k}\int \boldsymbol{E}_i \cdot \boldsymbol{E}_k \mathrm{d}V = \frac{1}{8\pi}\sum_{\substack{i,k \\ (i\neq k)}}\int \boldsymbol{E}_i \cdot \boldsymbol{E}_k \mathrm{d}V. \qquad [4.13]$$

也可写成

$$E_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{8\pi}\int\left(\boldsymbol{E}^2 - \sum_i \boldsymbol{E}_i^2\right)\mathrm{d}V. \qquad [4.14]$$

（然而，在这一情况中，不能把上述积分分解为两个单独的积分，因为它们会发散的。）

§5. 例：球对称的电荷分布

我们来考察只与离固定点 O 的距离 r 有关的体电荷分布 $\rho(r)$。从而，电势 $\varphi(r)$ 只是 r 的函数。

在这种情况中，从泊松方程

$$-\nabla^2\varphi=4\pi\rho \qquad [5.1]$$

出发是最简便的。在极坐标中，当算符 ∇^2 作用在只与 r 有关的函数 φ 上时，具有如下的形式

$$\nabla^2\varphi\equiv\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right)\equiv\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\varphi)\equiv\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr}. \qquad [5.2]$$

于是，我们有

$$-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right)=4\pi\rho,$$

$$-r^2\frac{d\varphi}{dr}=4\pi\int_0^r\rho r^2dr\equiv e(r),$$

式中 $e(r)$ 为包含在半径为 r 的球内的电荷。从而，

$$-\frac{d\varphi}{dr}=E_r=\frac{e(r)}{r^2}. \qquad [5.3]$$

在距电荷分布中心 O 为 r 处的电场强度只取决于包含在以 O 为中心、半径为 r 的球内的电荷。球外的电荷，只要是球对称分布，并不影响 E。该电场强度与全部电荷 $e(r)$ 都集中在中心时相同。电势由下式给出

$$\varphi(r)=-\int_0^r\frac{e(r)}{r^2}dr=\int_0^r e(r)d\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$=e(r)\frac{1}{r}\bigg|_0^r-\int_0^r\frac{1}{r}e'(r)dr.$$

因为 $e'(r)=(d/dr)[e(r)]=4\pi r^2\rho$，而且，由于当 $r\to0$ 时 $e(r)$ 按照 r^3 趋于零，所以我们有

森

$$\varphi(r)=\frac{e(r)}{r}-4\pi\int_0^r \rho r dr+\text{常数}. \qquad [5.4]$$

a. **均匀带电球**

$$\rho=\begin{cases}\rho_0=\text{常数} & r<a,\\ 0 & r\geqslant a;\end{cases}$$

$$e(r)=\begin{cases}\frac{4}{3}\pi r^3\rho_0=e\frac{r^3}{a^3} & r<a,\\ \frac{4}{3}\pi a^3\rho_0\equiv e & r\geqslant a;\end{cases}$$

$$-\frac{d\varphi}{dr}=E_r=\begin{cases}e\frac{r}{a^3} & r<a,\\ \frac{e}{r^2} & r\geqslant a;\end{cases}$$

$$\varphi=\begin{cases}\frac{e}{2a^3}(3a^2-r^2) & r<a,\\ \frac{e}{r} & r\geqslant a.\end{cases}$$

(常数已这样选定，使得 $\varphi(\infty)=0$，而且在 $r=a$ 处 φ 是连续的。)

静电能的计算给出

$$E_{\text{pot}}=\frac{1}{2}\int\rho\varphi dV=\frac{1}{2}\rho_0\frac{1}{2}\frac{e}{a^3}\int_0^a(3a^2-r^2)4\pi r^2dr$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3e}{a^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{e}{a^3}\left[3a^2\frac{a^3}{3}-\frac{a^5}{5}\right]=\frac{3}{5}\cdot\frac{e^2}{a}.$$

利用$\frac{1}{8\pi}\int E_r^2 dV$ 可得相同的结果。

b. **均匀带电球面**

令

$$\omega=\frac{e}{4\pi a^2},$$

其中，e 为总电荷，a 为球的半径. 根据高斯定律，

$$r^2\cdot E_r=\text{常数}$$

在球面内、外都必定成立。如果我们分别用 1 和 2 来表示球内和球外区域，则

$$E_{r1}=\frac{C_1}{r^2}\qquad r<a,$$

但是，由于在球心不能存在不连续性，所以 $C_1=0$，于是

$$E_{r1}=0.$$

$$E_{r2}=\frac{C_2}{r^2}\qquad r>a;$$

但是

$$E_{r2}-E_{r1}=4\pi\omega=\frac{e}{a^2}=(E_{r2})_{r=a},$$

所以，$c_2=e$。于是

$$E_r=\frac{e}{r^2},\ \varphi=\frac{e}{r}\qquad r>a,$$

$$E_r=0,\ \varphi=\frac{e}{a}\qquad r<a,$$

由此，我们再次看到，面电荷对外部的作用就如同它集中在球心一样。而在球内，它并不产生效应。于是，能量为

$$E_{\text{pot}}=\frac{1}{8\pi}\int E^2\mathrm{d}V=\frac{e^2}{8\pi}\int_a^\infty\frac{4\pi r^2}{r^4}\mathrm{d}r=\frac{e^2}{2a}.$$

对于点电荷的极限情况，$E_{\text{pot}}\to\infty$。

§6. 静电场方程同库仑定律的等效性的证明

我们已从库仑定律出发导出了场方程[2.4]，[2.3]，或[3.4]，[3.5]，

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{E}=0,\ \operatorname{div}\boldsymbol{E}=4\pi\rho,$$

或

$$\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi,\ \nabla^2\varphi=-4\pi\rho.$$

现在要证明，也可由这些方程反过来导出库仑定律。为此，我们还

必须要求当 $r\to\infty$ 时 φ 至少要象 $1/r$ 那样快地趋于零。

为简单起见，我们将只对体电荷进行证明。为此，要用到格临定理。如果将 $\boldsymbol{A}=\varphi\operatorname{grad}\psi$ 代入高斯定理

$$\oint_F A_n \mathrm{d}f=\oint_F \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}f=\int_V \operatorname{div}\boldsymbol{A}\mathrm{d}V,$$

那么，由于

$$\operatorname{div}(\varphi\operatorname{grad}\psi)=\varphi\nabla^2\psi+\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi, \qquad [6.1]$$

我们得到格临第一恒等式:

$$\oint\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\mathrm{d}f=\int\varphi\nabla^2\psi\mathrm{d}V+\int\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi\mathrm{d}V. \qquad [6.2]$$

对调[6.1]式中的 φ 和 ψ，再与[6.1]式相减，得

$$\operatorname{div}(\varphi\operatorname{grad}\psi-\psi\operatorname{grad}\varphi)=\varphi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\varphi,$$

从而给出格临第二恒等式:

$$\oint\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\mathrm{d}f=\int(\varphi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\varphi)\mathrm{d}V. \qquad [6.3]$$

对于在其中 φ 和 ψ 皆为正则的任意体积，这些结果都是成立的。

把 φ 看作我们所求的势函数，并令 $\psi_{P'}=1/r_{PP'}$，则可把格临第二恒等式用来积分泊松方程。为了使被积函数是正则的，我们把积分域限制在以固定点 P 为球心的小球面 K_P 与大球面 K 之间(参见图 6.1)。因为

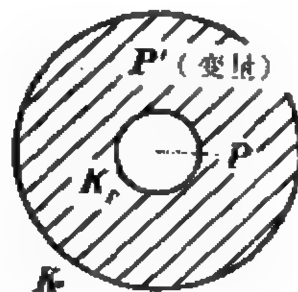


图 6.1

$$\nabla^2\psi=0 \qquad (\text{对于 } P\neq P'),$$

我们有①

① 式中第二个积分的积分域 K_P 英译本误印为 KP。——中译者注

$$\oint_{K}\left(\varphi\frac{\partial(1/r)}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\mathrm{d}f_{P'}+\oint_{K_P}\left(\varphi\frac{\partial(1/r)}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\mathrm{d}f_{P'}$$

$$=4\pi\int\frac{\rho_{P'}}{r_{PP'}}\mathrm{d}V_{P'}.$$

由于我们所做的 φ 在无穷远趋于零的假设，所以在球面K上的积分等于零。此外，在球面 K_P 上的积分中的第二项并无贡献。由于在小球面上 $\partial(1/r)/\partial n=1/r^2$，所以小球面 K_P 上的积分给出 $4\pi\rho_P$。从而，

$$\varphi_P=\int\frac{\rho_{P'}}{r_{PP'}}\mathrm{d}V_{P'},$$

这正是库仑定律。

如果存在面电荷，可用类似的方式证明。然而，对于点电荷系的情况，证明就不这样简单了。

§7. 电介质，唯象的处理

我们考察在真空中的带电平行板电容器，即两块平行带电金属板。假设板的面积比它们的间距大得多，以致于无需考虑边缘效应。令一块板上的面电荷密度为$+\omega$，而另一块的为$-\omega$（参见图 7.1）。此时，两板间存在匀强电场

$$E_x=+4\pi\omega,$$

而两板之外的电场为零。因而两板间的电势差为

$$\varphi_1-\varphi_2=4\pi\omega d,$$

式中 d 为两板的间距。

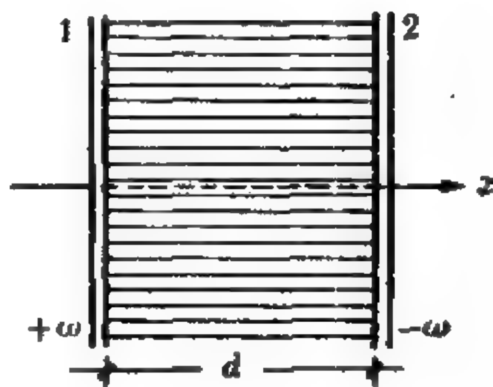


图 7.1

如果我们在两板之间放入绝缘体，则将发生如下的现象：

1. 若把两板同电池组连接，使它们的电势保持不变，则有电流出现。两板上的电荷增加。
2. 另一方面，若两板是绝缘的，则它们的电荷保持不变，而两板间的电势差减小到 ε 分之一。

$$\varphi_1-\varphi_2=\frac{4\pi\omega}{\varepsilon}d.$$

因数 ε 称为绝缘体的介电常数，并且一般大于 1[A－2]。

上述现象可诠释如下：在电介质的外表面形成电荷层，靠近板 1 的一侧其面电荷密度为 $-(1-1/\varepsilon)\omega$①，而靠近板 2 的一侧其面电荷密度为 $+(1-1/\varepsilon)\omega$。与板上原有的电荷合在一起，结果在板 1 上的净面电荷密度为 ω/ε，而板 2 上为 $-\omega/\varepsilon$。

不能直接观察到电介质表面上产生的电荷。它的存在只能通过电势差来验证。通过电传导并不能使它改变，它实际上依附于介电物质，并单纯地根据外场来自行调整。这种类型的电荷称为极化电荷，以区别于金属板上存在的真实(传导)电荷。而后者是能够使之任意改变的。

以后我们将用 ρ_p 和 ω_p 代表极化电荷密度，ρ_t 和 ω_t 代表传导电荷密度。于是，$\rho=\rho_p+\rho_t$ 和 $\omega=\omega_p+\omega_t$ 代表总电荷密度。

若设想在电容器极板与电介质间存在一薄层真空区域，则电荷密度和电容器内部电场间的关系为(参见图 7.2)

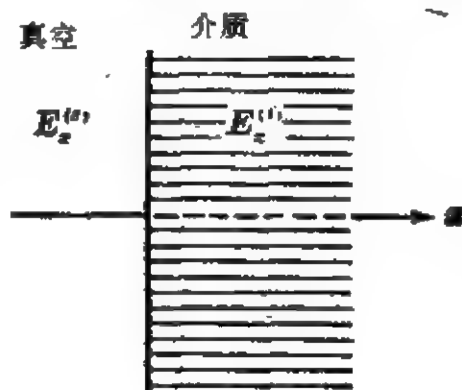


图 7.2

$$E_z^{(e)}=4\pi\omega,$$

① 英译本有误，已按德文原本校正。又，下文中，英译本把 ω/ε 称为净电荷(net charge)，实为净面电荷密度。——中译者注

$$E_x^{(i)}-E_x^{(e)}=4\pi\omega_p,\quad \text{式中 } \omega_p=-\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)\omega.$$

于是

$$E_x^{(i)}=4\pi\left[\omega-\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)\omega\right]=\frac{4\pi}{\varepsilon}\omega,$$

或

$$E_x^{(i)}=\frac{1}{\varepsilon}E_x^{(e)},$$

以及

$$4\pi\omega_p=-(\varepsilon-1)E_x^{(i)}.$$

因此，若在电介质与真空之间的界面上不存在传导电荷密度，则

$$E_n^{(e)}+\varepsilon E_n^{(i)}=0,$$
$$E_n^{(e)}+E_n^{(i)}=4\pi\omega_p=-(\varepsilon-1)E_n^{(i)}.$$

倘若设想两电介质之间存在一薄层真空区域，则不难把这个关系推广到两个任意电介质的界面上。在这种情况中，若不存在传导电荷，则

$$\varepsilon_1E_{n_1}+\varepsilon_2E_{n_2}=0.$$

如果存在传导电荷，则

$$\varepsilon_1E_{n_1}+\varepsilon_2E_{n_2}=4\pi\omega_t.$$

对于真空，ε 等于 1。

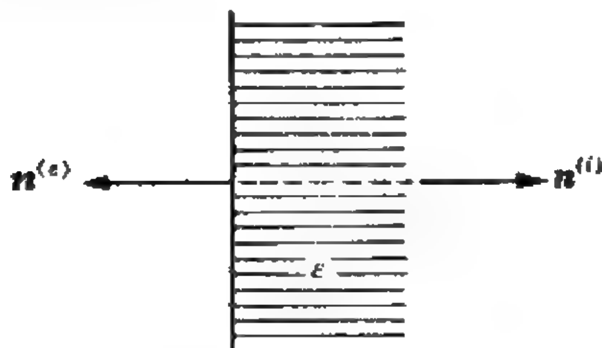


图 7.3

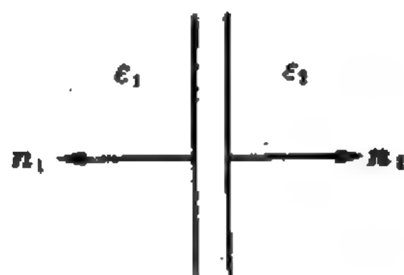


图 7.4

我们引入一个称为电位移 $\mathbf{D}$ 的新矢量

$$\mathbf{D}=\varepsilon \mathbf{E}, \qquad [7.1]$$

则两绝缘体界面上的最普遍关系式变为

$$D_{n_1}+D_{n_2}=4\pi\omega_t. \qquad [7.2]$$

由于

$$E_{n_1}+E_{n_2}=4\pi\omega \qquad [7.3]$$

(式中 $\omega=\omega_p+\omega_t$)仍然成立，从而

$$(\varepsilon_1-1)E_{n_1}+(\varepsilon_2-1)E_{n_2}=-4\pi\omega_p. \qquad [7.4]$$

这是物质的一个重要性质。

在平行板电容器的匀强电场中，只产生极化面电荷(其密度为 ω_p)。然而，在普遍情况下，在绝缘体内部也产生极化体电荷(其密度为 ρ_p)。

由于这些 ω_t 是场 $\mathbf{D}$ 的面源，因此利用一种极限过渡(将一系列具有传导面电荷密度 ω_t 的薄层叠积在一起)，可以看出，这些传导电荷的体密度 ρ_t 是 $\mathbf{D}$ 的体源:

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=4\pi\rho_t. \qquad [7.5]$$

由于

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho \qquad [7.6]$$

(式中 $\rho=\rho_p+\rho_t$)，亦可得到

$$\operatorname{div}\{(\varepsilon-1)\mathbf{E}\}=-4\pi\rho_p. \qquad [7.7]$$

若媒质是均匀的，即 ε 与位置无关，则

$$(\varepsilon-1)\operatorname{div}\mathbf{E}=-4\pi\rho_p. \qquad [7.8]$$

若以通常的方式将高斯定理应用于矢量 $(\varepsilon-1)\mathbf{E}$(然而，那些 $\omega_p\neq 0$ 的面除外)，则知

$$\int\rho_p dV+\int\omega_p df=0. \qquad [7.9]$$

因此，全部极化电荷的和为零。

若在两块电介媒质之间界层上 $\omega_t=0$，则 $\boldsymbol{D}$ 的法向分量 D_n是连续的，而其切线分量 $D_{\parallel}$一般是不连续的。这是由于下述事实所致：只要 φ 连续，并且 $\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}\varphi$ 仍然成立，则 $\boldsymbol{E}_{\parallel}$ 是连续的。

§8. 电介质现象的电子论诠释

迄今在纯唯象基础上引入的极化电荷，在电子论中被追溯到电偶极子。

电偶极子

首先考察相距为 d 的两个点电荷 $+e$ 和 $-e$。用下面的矢量定义这样两个电荷的电偶极矩

$$\boldsymbol{p}=e\boldsymbol{d}$$

(一般地，对于其和为零的任意多个电荷，定义

$$\boldsymbol{p}=\sum_i e_i\boldsymbol{x}_i,$$

式中 $\boldsymbol{x}_i$ 为这些电荷的位矢。因 $\sum\limits_i e_i=0$，这一矢量与坐标原点的位置无关。)

按图 8.1，由两个电荷产生的电势为

$$\varphi_P=\frac{e}{r_{PQ_+}}-\frac{e}{r_{PQ_-}}.$$

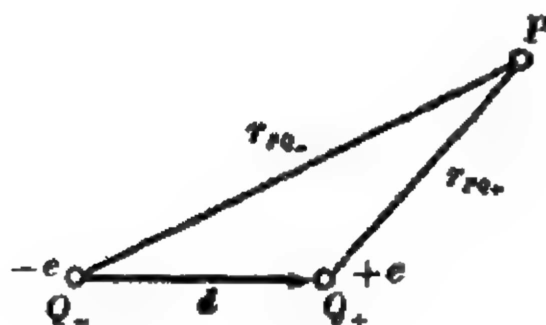


图 8.1

于是，若 $r \gg d$（极限过渡：$r\to\infty$，或当 $d\to 0$ 时 $e\to\infty$，使得 ed 保持有限），两个电荷的这种排列叫做电偶极子。电偶极子的电势的泰勒展开式给出

$$\varphi_P = e(\boldsymbol{d}\cdot\mathrm{grad}_Q)\frac{1}{r_{PQ}} = (\boldsymbol{p}\cdot\mathrm{grad}_Q)\,\frac{1}{r_{PQ}}. \qquad [8.1]$$

（式中 grad_Q 代表对于 Q 点的坐标所取的梯度。）于是，偶极子产生的电场强度为

$$\boldsymbol{E}_P = (\boldsymbol{p}\cdot\mathrm{grad}_Q)\frac{\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_Q}{r_{PQ}^3}. \qquad [8.2]$$

写成分量式，则

$$E_k = \left(\sum_i p_i \frac{\partial}{\partial x_{Qi}}\right)\frac{x_{Pk} - x_{Qk}}{r_{PQ}^3} \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

现在考察一块有限大小的绝缘体。设在每一原子或分子上都存在一个偶极子。（暂时不去问这些偶极子是如何形成的。）于是，这些偶极子所产生的电场强度为

$$\boldsymbol{E}_P = \sum_Q (\boldsymbol{p}\cdot\mathrm{grad}_Q)\frac{\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_Q}{r_{PQ}^3}\text{①}. \qquad [8.3]$$

现在通过用连续分布代替这些偶极子的不连续分布的近似法，把上式的求和变换为积分。令 $\boldsymbol{p}$ 为每个分子的电偶极矩，N 为每立方厘米中的分子数。则每立方厘米中的电偶极矩 $\boldsymbol{P} = N\boldsymbol{p}$ 称为**电极化度**。于是电场强度变为

$$\boldsymbol{E}_P = \int (\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{grad}_Q)\frac{\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_Q}{r_{PQ}^3}\mathrm{d}V_Q. \qquad [8.4]$$

希望对这积分做些变换，为此需用推广的高斯定理：对于任意矢量，下式成立

$$(\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{B} + (\mathrm{div}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \mathrm{div}(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}), \qquad [8.5]$$

---

① 德文原本是 $\sum\limits_{P(\text{对全部偶极子})}$。——中译者注

式中$(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A})$是由矢量$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{A}$的广义乘积所构成的张量①。用分量表示为

$$\sum_i\left(A_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)B_k+\left(\sum_i\frac{\partial A_i}{\partial x_i}\right)B_k=\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}(B_kA_i). \qquad [8.6]$$

根据高斯定理，对正则的矢量函数，则有

$$\int(\boldsymbol{A}\cdot\text{grad})\boldsymbol{B}dV=-\int(\text{div }\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}dV+\oint A_n\boldsymbol{B}df. \qquad [8.7]$$

依照这关系，得到

$$\boldsymbol{E}_P=-\int(\text{div}\boldsymbol{P})\frac{\boldsymbol{x}_P-\boldsymbol{x}_Q}{r_{PQ}^3}dV-\oint P_n^{(i)}\frac{\boldsymbol{x}_P-\boldsymbol{x}_Q}{r_{PQ}^3}df.$$

式中$P_n^{(i)}$代表$\boldsymbol{P}$的内法向分量。$\boldsymbol{E}_P$的这一形式表明，电极化度的连续分布完全等效于极化电荷的体分布和面分布。的确，从第一个积分得出

$$\rho_P=-\text{div}\boldsymbol{P}, \qquad [8.8]$$

倘若积分域完全在闭曲面的一侧，而该曲面把绝缘体包容在内时，则第二个积分给出极化面电荷密度

$$\omega_P=-P_n^{(i)}.$$

另一种情况，曲面可能是不连续的，而且以这样一种方式位于绝缘体内部，即它的两侧都被积分域所包围。在这样的曲面上，总极化电荷密度由下式给出

$$\omega_P=-(P_{n_1}-P_{n_2}). \qquad [8.9]$$

第二种情况是较普遍的，它把第一种情况作为特例($P_{n_2}=0$)包括在内。

将高斯定理应用于矢量$\boldsymbol{P}$，再次给出

---

① 这句话是按德文原本译出的。广义乘积原文为 allgemeine Produkt。$(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A})$代表$\boldsymbol{AB}$，一般地，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$。——中译者注



$$\int \rho_P \mathrm{d}V + \int \omega_P \mathrm{d}f = 0. \qquad [8.10]$$

而且，我们看到，为了保持上节的唯象定律，必须令 $\boldsymbol{P}$ 与 $(\varepsilon-1)\boldsymbol{E}/4\pi$ 等同。所以，

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} - 4\pi \boldsymbol{P}. \qquad [8.11]$$

作一个明显的假设

$$\boldsymbol{p} = \alpha \boldsymbol{E}', \qquad [8.12]$$

则介电常数 ε 也能够用一些原子性的量来表达。上式中 α 为分子极化率，而 $\boldsymbol{E}'$ 为有效电场强度；即电偶极子 $\boldsymbol{p}$ 所在处的有效电场强度，但不包括偶极子本身所产生的场。如果我们作一个粗略的近似 $\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}$，则

$$\boldsymbol{P} = N\alpha \boldsymbol{E}$$

和

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha N. \qquad [8.13]$$

从经验发现，对于静电场 $\alpha>0$，所以，ε 大于 1[A-2]。

现在我们要考虑 $\boldsymbol{E}'$ 同 $\boldsymbol{E}$ 之间的差异，以使理论更为精密。宏观电场强度恰好是微观电场强度的平均：

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{V}\int \boldsymbol{E}_{分子} \mathrm{d}V.$$

令 $\boldsymbol{e}$ 代表单个偶极子的电场强度，则

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}' + N\int_K \boldsymbol{e} \mathrm{d}V.$$

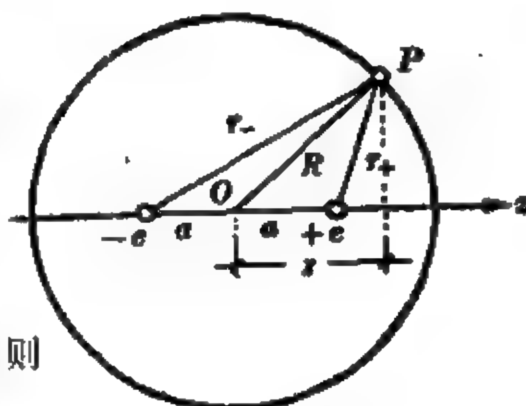


图 8.2

这里已假定媒质是各向同性的。积分遍及包含偶极子的一个球体。我们将会看到，积分与球的大小无关。

$\int_K \boldsymbol{e}\mathrm{d}V$ 的**计算**①。其几何图形示于图 8.2 中。将采用柱面坐

① Lundblad, *Ann. d. Physik* 57, 183(1918)。

标 ρ, ξ。令 R 为球的半径，$P(\rho, z)$ 为该球面上的一点。显然，

$$R^2=\rho^2+z^2.$$

由于对称性，仅需考虑，

$$e=-e\cdot\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r_+}-\frac{1}{r_-}\right)$$

的 z 分量。因

$$e_z=-e\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(\zeta-a)^2}}-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(\zeta+a)^2}}\right\},$$

积分变为

$$\begin{aligned}\int_K e_z\mathrm{d}V=&-e\int_0^R R2\pi\rho\mathrm{d}\rho\int_{-z=-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{+z=+\sqrt{R^2-\rho^2}}\mathrm{d}\zeta\\ &\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(\zeta-a)^2}}-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(\zeta+a)^2}}\right\},\\ &=-e\int_0^R 4\pi\rho\mathrm{d}\rho\left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-a)^2}}-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z+a)^2}}\right],\\ &=-e\int_0^R 4\pi z\mathrm{d}z\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2-2az}}-\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2+2az}}\right],\\ &=-e\int_{-R}^{+R}\frac{4\pi z\mathrm{d}z}{\sqrt{R^2+a^2-2az}}.\end{aligned}$$

作代换 $u^2=R^2+a^2-2az$，我们得到

$$\begin{aligned}\int_K e_z\mathrm{d}V&=-e\cdot4\pi\int_{|R-a|}^{R+a}\frac{R^2+a^2-u^2}{2a^2}\mathrm{d}u\\ &=-4\pi e\cdot\left.\frac{(R^2+a^2)u-\frac{1}{3}u^3}{2a^2}\right|_{|R-a|}^{R+a}.\end{aligned}$$

若设 $R>a$，则这一表达式事实上变成与 R 无关：

$$\int_K e_z\mathrm{d}V=-\frac{4\pi}{3}e2a=-\frac{4\pi}{3}p.$$

式中 $p=2ea$ 为偶极子的电矩。于是，作为电偶极子的本征场对宏

观场的贡献，我们得到

$$\int_{x} e dV = -\frac{4\pi}{3} p.$$

上面的计算是用有限的偶极子$(a \nrightarrow 0)$进行的，这一点很重要，否则被积函数按a 的幂展开时将会发散。

对各向同性的媒质，则得

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}' - \frac{4\pi}{3} N \boldsymbol{p} = \boldsymbol{E}' - \frac{4\pi}{3} \boldsymbol{P}. \qquad [8.14]$$

一般说来，这个公式对各向异性的媒质是不成立的。

由于

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{4\pi}(\varepsilon - 1)\boldsymbol{E}$$

与

$$\boldsymbol{P} = N\alpha \boldsymbol{E}' = N\alpha\left(\boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{3}\boldsymbol{P}\right)$$

$$= N\alpha\left[1 + \frac{1}{3}(\varepsilon - 1)\right]\boldsymbol{E},$$

分子极化率同介电常数之间的关系为

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} N\alpha. \qquad [8.15]$$

这就是各向同性媒质的克劳修斯-莫索提关系式。

若 $\varepsilon - 1 \ll 1$，则 $\varepsilon + 2 \approx 3$，而

$$\varepsilon - 1 \approx 4\pi N\alpha,$$

如此，即得[8.13]式的近似公式。

§ 9. 电势问题

在库仑定律的基础上，我们能计算给定的电荷分布所产生的电势。然而，实际上，往往给出其它的量，而电荷分布通常只是隐含地被确定。

φ 必须满足如下条件:

1. **在导体的界面上,**

(a)对于给定总电荷的孤立导体 $-\oint \varepsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\mathrm{d}f=4\pi e$。此外,还已知 $\varphi=$常数。(然而,此时并不给出该常数值);或

(b)若把导体接至恒定电势的电源,则 $\varphi=\varphi_0$。此时给出电势,但并不给出电荷。

2. **在绝缘体的界面上,** 若 $\omega_i=0$,则 φ 和 $\varepsilon\partial\varphi/\partial n$ 是连续的。

这些就是 φ 的边界条件。此外,还有对于真空以及 ε 是连续的绝缘体都成立的微分方程

$$\mathrm{div}(\varepsilon\,\mathrm{grad}\varphi)=0. \qquad [9.1]$$

因导体内部 φ 为常数,所以无需关心导体内部。在真空中($\varepsilon=1$),或一般地在 $\varepsilon=$常数的区域内,上述微分方程变为

$$\nabla^2\varphi=0. \qquad [9.2]$$

可以证明,在这些条件下解是存在的。这里我们不作证明——从物理学的角度来看,解的存在是显然的。此外,不难证明,若 $\varepsilon>0$(物理上,这是显然的[A-2])并且在无穷远处 φ 至少象 $1/r$ 那样快地趋于零,则解是唯一的。

解的唯一性的证明。假设:存在满足全部所需条件的两个解 φ_1 和 φ_2。然后我们考察该两个解的差

$$\psi=\varphi_1-\varphi_2.$$

在导体面上,

(a) $\oint\varepsilon(\partial\psi/\partial n)\mathrm{d}f=0,\qquad \psi=$常数,

或

(b) $\psi=0$,

即,在上述两种情况中都有

$$\oint \psi e(\partial\psi/\partial n)\mathrm{d}f=0.$$

在绝缘体界面上，$\varepsilon\partial\psi/\partial n$ 和 ψ 都是连续的，而且在 ε 连续的整个区域中，$\mathrm{div}(\varepsilon\mathrm{grad}\psi)=0$。由于

$$\mathrm{div}(\psi\varepsilon\mathrm{grad}\psi)\equiv\psi\mathrm{div}(\varepsilon\mathrm{grad}\psi)+\varepsilon(\mathrm{grad}\psi)^2,$$

将高斯定理应用于把全部导体① 和不连续面都除外的一个很大的球的内部，得

$$\oint_{\text{巨大球}} \psi e\frac{\partial\psi}{\partial n}\mathrm{d}f+\oint_{\text{导体表面}}\psi\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial n}\mathrm{d}f-\oint_{\text{绝缘体表面}}\psi\left(e_1\frac{\partial\psi}{\partial n_1}+e_2\frac{\partial\psi}{\partial n_2}\right)\mathrm{d}f$$
$$=\int\varepsilon(\mathrm{grad}\psi)^2\mathrm{d}V=0,$$

由于等式左端的三个积分都等于零(第一个积分为零是因为当 $r\to\infty$ 时，ψ 按 $1/r$ 趋于零。) 因 $\varepsilon>0$，被积函数是正定的。仅当 $\mathrm{grad}\psi=0$，即 $\psi=$常数时，它才能等于零。然而，由于在无穷远处 $\psi=0$，所以处处 $\psi=0$，从而证明了解的唯一性。

数学注记。微分方程

$$\mathrm{div}(\varepsilon\mathrm{grad}\varphi)=0$$

等效于变分问题:

$$J=\frac{1}{8\pi}\int\varepsilon(\mathrm{grad}\varphi)^2\mathrm{d}V-\sum_i e_i\varphi_i=\text{极小，对给定的边界条件。}$$

对 i 的求和应遍及电荷已给定的全部导体(情况 a)。于是，

$$\delta J=\frac{1}{4\pi}\int\varepsilon\mathrm{grad}\varphi\cdot\mathrm{grad}(\delta\varphi)\mathrm{d}V-\sum_i e_i\delta\varphi_i$$
$$=-\frac{1}{4\pi}\int\mathrm{div}(\varepsilon\mathrm{grad}\varphi)\delta\varphi\mathrm{d}V+\frac{1}{4\pi}\int\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}\delta\varphi\mathrm{d}f$$
$$-\sum_i e_i\delta\varphi_i=0.$$

---

① 德文原本和英译本都是“金属体”。——中译者注

除属于情况 a 的那些导体表面外，在所有的面上面积分都等于零。由于 n 为指向导体内部的法线，所以对于那样一些曲面，面积分为 $\sum_i e_i\delta\varphi_i$。于是，仅剩下

$$\delta J=-\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{div}(\varepsilon\operatorname{grad}\varphi)\,\delta\varphi dV=0.$$

所以，微分方程[9.1]为一必要条件。

另一方面，可以证明，由于 $\varepsilon>0$，那么，和边界条件一起，对于极小值问题也是充分的。的确，令 φ 满足这微分方程和这些边界条件。取

$$\bar{\varphi}=\varphi+\varphi'$$

作为极小值问题的通解。于是有

$$J(\bar{\varphi})=J(\varphi)+\frac{1}{8\pi}\int \varepsilon(\operatorname{grad}\varphi')^2 dV,$$

$$J(\bar{\varphi})\geqslant J(\varphi),$$

因此 φ 确实是极小值问题的解。

物理诠释。在变分问题中出现的被积函数具有能量密度的意义。的确，

$$\frac{1}{8\pi}\varepsilon(\operatorname{grad}\varphi)^2=\frac{1}{8\pi}\varepsilon\boldsymbol{E}^2=\frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})=\frac{1}{8\pi}\boldsymbol{E}^2+\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{P}).$$

式中 $\boldsymbol{E}^2/8\pi$ 为真空中电场的能量密度，而 $(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{P})/2$ 为单位体积的电极化势能。(因数 1/2 来自电极化正比于 $\boldsymbol{E}$ 这一事实。) 如此，两者之和给出电介质中的能量密度。

§10. 曲线坐标

以正交曲线坐标 u, v, 和 w 表示的线元的平方具有如下的形式

$$ds^2=\sum_{i=1}^{3}(dx_i)^2=e_1^2du^2+e_2^2dv^2+e_3^2dw^2. \qquad [10.1]$$

(在正交坐标的情况中，没有交叉项。)式中 e_1, e_2 和 e_3 为 u, v 和 w 的函数。

矢量 $\boldsymbol{A}$ 与线元的标积为

$$A_s ds=\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{x}\equiv A_u e_1 du+A_v e_2 dv+A_w e_3 dw.$$

若令 $\boldsymbol{A}=\mathrm{grad}\varphi$，则表达式

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv+\frac{\partial\varphi}{\partial w}dw$$

必与

$$(\mathrm{grad}\varphi)_u e_1 du+(\mathrm{grad}\varphi)_v e_2 dv+(\mathrm{grad}\varphi)_w e_3 dw$$

等同；即，$\mathrm{grad}\varphi$ 的 u, v, 和 w 分量为

$$(\mathrm{grad}\varphi)_u=\frac{1}{e_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u},\ (\mathrm{grad}\varphi)_v=\frac{1}{e_2}\frac{\partial\varphi}{\partial v},\ (\mathrm{grad}\varphi)_w=\frac{1}{e_3}\frac{\partial\varphi}{\partial w}. \qquad [10.2]$$

面元张量为

$$df_{uv}=e_1e_2dudv,\ \ df_{vw}=e_2e_3dvdw,\ \ df_{uw}=e_1e_3dudw,$$

而且面元与 $\mathrm{curl}\boldsymbol{A}$ 垂直于该面元的分量的积为

$$\mathrm{curl}_n A df=(\mathrm{curl}\boldsymbol{A})_u e_2e_3dvdw+(\mathrm{curl}\boldsymbol{A})_v e_1e_3dudw+\cdots.$$

运用斯托克斯定理，

$$\oint A_s ds=\int\left[\frac{\partial(e_3A_w)}{\partial v}-\frac{\partial(e_2A_v)}{\partial w}\right]dvdw+\cdots,$$

通过对比，则得

$$(\mathrm{curl}\boldsymbol{A})_u=\frac{1}{e_2e_3}\left[\frac{\partial(e_3A_w)}{\partial v}-\frac{\partial(e_2A_v)}{\partial w}\right],\text{等等.} \qquad [10.3]$$

不难证明　$\mathrm{curl}(\mathrm{grad}\varphi)=0$。

因　$A_n df=A_u e_2e_3dvdw+A_v e_1e_3dudw+A_w e_1e_2dudv,$

高斯定理可写成

$$\oint A_n \mathrm{d}f = \int \left[\frac{\partial}{\partial u}(e_2 e_3 A_u) + \frac{\partial}{\partial v}(e_1 e_3 A_v) + \cdots \right] \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

因第二个积分中的被积表达式为 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}\mathrm{d}V$①，而且由于

$$\mathrm{d}V = e_1 e_2 e_3 \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w,$$

于是

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{A} = \frac{1}{e_1 e_2 e_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}(e_2 e_3 A_u) + \frac{\partial}{\partial v}(e_1 e_3 A_v) + \frac{\partial}{\partial w}(e_1 e_2 A_w) \right]. \qquad [10.4]$$

将 $\boldsymbol{A} = \mathrm{grad}\varphi$ 代入上式，则得拉普拉斯算符 $\nabla^2 \equiv \mathrm{div\ grad}$。于是，

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{e_1 e_2 e_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{e_2 e_3}{e_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{e_1 e_3}{e_2} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{e_1 e_2}{e_3} \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right) \right]. \qquad [10.5]$$

此方程也可从变分原理：

$$\int (\mathrm{grad}\varphi)^2 \mathrm{d}V = \text{极小}$$

导出。

§ 11. 电势问题求解的几个例子

用几个例子来说明电势问题求解的两种方法。

***a*　电象法**

1. **无限大导电板外的点电荷 e。** 假定该板接地，故其电势为 $\varphi = 0$。电象法是设想在 e 对于板的镜象点上有一个虚电荷 $-e$。这个象电荷应与电荷 e 共同确定板右侧的电场，但对板左侧的电场应无影响(图 11.1)。即

$$x < 0:\ \ \varphi = 0;$$

① 原文为：……被积函数为 div **A** dV。——中译者注

$$x>0:\quad \varphi=\frac{e}{r}-\frac{e}{r'}.$$

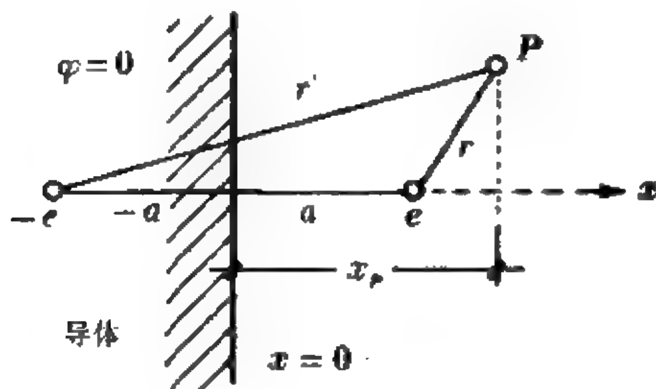


图 11.1

此 φ 满足方程 $\nabla^2\varphi=0$，并且在 $x=0$ 处是连续的。所以，根据唯一性定理，它就是问题的解。

为了求板上感生的面电荷，我们注意到

$$E_x=\frac{e}{r^3}(x_P-a)-\frac{e}{r'^3}(x_P+a).$$

在 $x_P=0$ 处，

$$r'=r,\quad E_x=-\frac{2a}{r^3}e=4\pi\omega.$$

于是，

$$\omega=-\frac{e}{2\pi}\frac{a}{r^3}.$$

面导电板上的总电荷则为

$$\bar{e}=\int_0^\infty \omega 2\pi\rho\mathrm{d}\rho=\int_a^\infty \omega 2\pi r\mathrm{d}r=-e,$$

式中 $r=\sqrt{\rho^2+a^2}$，$r\mathrm{d}r=\rho\mathrm{d}\rho$（$\rho$ 为原点至板上某点的距离）。

2. **半无限均匀电介质空间外的点电荷 e。**在此情况下，边界条件为

$$\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_-=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_+,$$

式中 ε 为媒质的介电常数。再次设想一个对边界右侧的电场有贡献的象电荷 $-e'$（图 11.2），但 $-e'$ 的量值有待确定。于是，

$$x>0:\quad \varphi=\frac{e}{r}-\frac{e'}{r'},$$

$$x<0:\quad \varphi=\frac{e-e'}{r},$$

所以，在 $r=r'$ 处 φ 是连续的。于是，

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_+=+\frac{a}{r^3}(e+e'),\quad \varepsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_-=+\frac{e}{r^3}\varepsilon(e-e').$$

因此，边界条件要求 $e+e'=\varepsilon(e-e')$。从而

$$e'=\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}e.$$

所以，问题的解为

$$x>0:\quad \varphi=\frac{e}{r}-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\frac{e}{r'},$$

$$x<0:\quad \varphi=\frac{2}{\varepsilon+1}\frac{e}{r}.$$

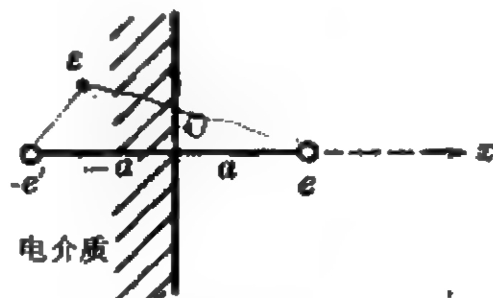


图 11.2

3. **导体球外的点电荷 e。** 对每一点 P 都能用如下的关系式指定一个"镜象"点 P'（图 11.3）：

$$\rho\rho'=a^2.$$

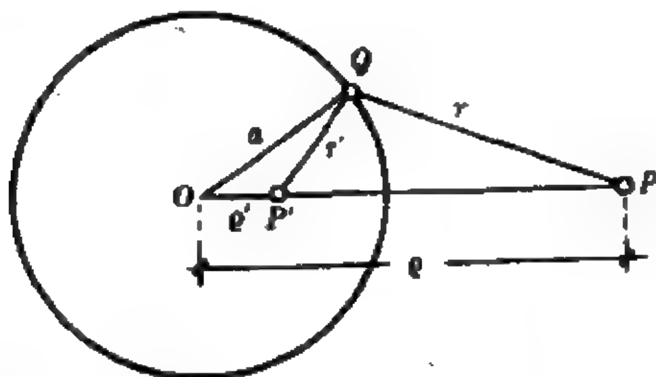


图 11.3

由于三角形 $OP'Q$ 与 OQP 相似（在 O 点有公共角，而且 $\rho'/a=$

a/ρ)，所以对球面上所有的点 Q，下列关系式都成立

$$\frac{r'}{r}=\frac{a}{\rho}=\frac{\rho'}{a}=\sqrt{\frac{\rho'}{\rho}}=\text{常数。}$$

这一关系能够用来求解电势问题。

第一种情况。接地的球。我们设想在点 P' 处的虚电荷 $-e$ 对外电场有贡献。于是

$$\varphi=\frac{e}{r}-\frac{e'}{r'}\qquad\text{球外，}$$

$$\varphi=0\qquad\text{球内。}$$

为了在球面上 φ 能连续，下列关系必须成立：

$$e'=e\cdot\frac{r'}{r}=e\sqrt{\frac{\rho'}{\rho}}.$$

因此，e' 为常数，从而问题得解。球面上感生的总电荷为 $-e'$（根据高斯定律）。

第二种情况。绝缘球。设球不带电荷。于是，象电荷 $-e'$ 必须被抵消。为此，设想在球心有一正电荷 $+e'$，令 R 代表从球心到场点的距离，则

$$\varphi=\frac{e}{r}-\frac{e'}{r'}+\frac{e'}{R}\qquad R>a\text{ 时，}$$

$$\varphi=\frac{e'}{a}\qquad R<a\text{ 时，}$$

式中 e' 仍由上述第一种情况中的公式给出。

对于电介质球的情况，则不能得出封闭形式的解；而是得到一个无穷级数。对于两个导体球也是这样。

4. **均匀电场中的导体球。** 若 $\rho\to\infty$ 和 $e\to\infty$ 使得 $e/\rho^2\to E$，则这一问题可以看作是上述第 3 段中的第二种情况的极限。由此可见，在球心产生一个电矩为 p 的电偶极子：

$$p=e'\rho'.$$

我们也可从下面的特别假设出发：

$$r>a: \quad \varphi=-Ex+A+B\frac{x}{r^3},$$

$$r<a: \quad \varphi=A,$$

式中 Bx/r^3 为一个电偶极子的电势。定义 $x=r\cos\theta$，则也可写成

$$r>a: \quad \varphi=\cos\theta\left(-Er+\frac{B}{r^2}\right)+A.$$

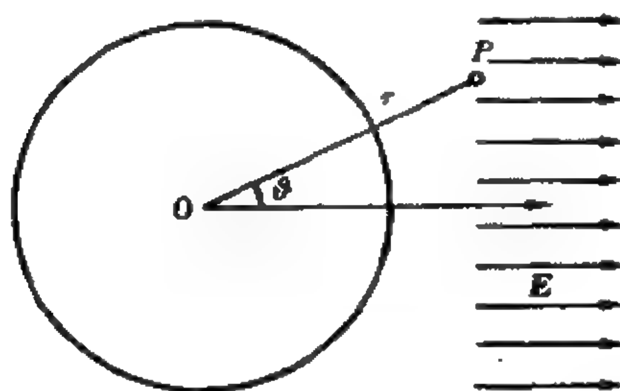


图 11.4

当 $r=a$ 时，若括号中的量为零，则可实现 φ 的连续性。于是，

$$B=Ea^3.$$

但常数 A 仍未确定；然而，它并无物理意义。

在球面上感生的电荷分布为

$$4\pi\omega=-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=a}=\cos\theta\left(E+\frac{2B}{a^3}\right)=3E\cos\theta.$$

由于 $\oint_{球面}\cos\theta\mathrm{d}f=0$，所以，球面上的总电荷为

$$\oint\omega\mathrm{d}f=0.$$

5. **在另一种电介媒质中的电介质球。**令球的介电常数为 ε_i (＝常数)，而周围媒质的介电常数为 ε_a(＝常数)。设距球远处的场为均匀场，并等于 E。我们假定：

$$\varphi_a = -E\left(x + \varkappa \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}\right) = -E\cos\theta\left(r - \frac{\varkappa}{r^2}\right),\ r > a;$$

$$\varphi_i = -Dx = -Dr\cos\theta, \qquad r < a.$$

在 $r=a$ 处的边界条件为

$$\varphi_i = \varphi_a: \qquad E\left(1 - \frac{\varkappa}{a^3}\right) = D,$$

$$\varepsilon_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} = \varepsilon_a \frac{\partial \varphi_a}{\partial r}: \qquad E\left(1 + \frac{2\varkappa}{a^3}\right)\varepsilon_a = D\varepsilon_i.$$

由此得知，若选取

$$\varkappa = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_a}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_a} a^3, \quad D = \frac{3\varepsilon_a}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_a} E,$$

则问题得解。

指出如下事实是有益的：当 $\varepsilon_i = \varepsilon$ 和 $\varepsilon_a = 1$ 时，便得到与克劳修斯-莫索提关系式([8.15]式)相似的表达式，即

$$\varkappa = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a^3.$$

正是由于这一事实，克劳修斯和莫索提才能够通过电介质是由微小导体球组成的假设来阐明电介质现象①。

b. 函数论在二维问题中的应用。

若空间电荷分布只取决于二个笛卡儿坐标，如 x 和 y，因而在垂直于第三个坐标轴的所有平面上电荷分布都是相同的，则在所有这些平面上，电场也必定等同，我们称之为二维问题。这时能用解析函数论来求解。

令 w 为复变数 $z = x + iy$ 的解析函数：

$$w(z) = u + iv \qquad (u, v \text{ 为实函数})。$$

---

① 参看 *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. V2, S. 329 或克劳修斯的原著，*Mechanische Wärmetheorie* (Braunschweig, 1887—91), Bd. 2, S. 62。

因

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\partial}{\partial x}(u+iv)=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}(u+iv),$$

故得到柯西-黎曼方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \text{ 和 } \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

由此得到

$$\nabla^2 u=0 \text{ 和 } \nabla^2 v=0, \text{ 式中 } \nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

即, u 和 v 都满足拉普拉斯方程。因此,我们将试图确定这样的解析函数,使得它们的实部 u(或虚部 v)代表所求的电势。根据刘维定理,一个处处(包括无穷远)正则的函数必为常数。因此,必须根据它们的奇点来表征这些函数的特征。

由于按照科希-黎曼方程, $\partial u/\partial n=\partial v/\partial s$, 所以得到(图 11.5)

$$\oint\frac{\partial u}{\partial n}ds=\oint\frac{\partial v}{\partial s}ds=[v] \text{ (绕行一周后 } v \text{ 的增量)。}$$

如果我们把电势 φ 和 u 等同起来,则有

$$\oint\frac{\partial u}{\partial n}ds=[v]=-4\pi\omega.$$

式中 ω 为一个单位高度的圆柱面上的电荷。若假定电荷均匀分布在一条垂直于 x-y 平面的无限长直线上,则 ω 代表每单位长度的电荷。

这里,绕行一周后 v 应有增量。这正是复数的对数性质;对 $w=\ln(z-z_0)$, v 得到增量 2π。

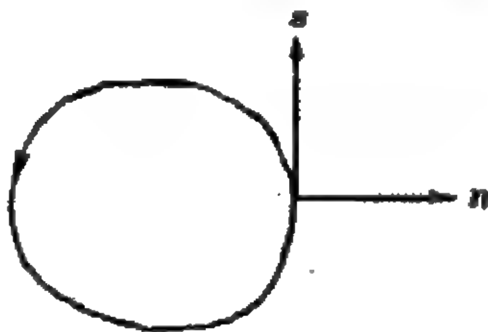


图 11.5

如果令

$$w=-\sum_q 2\omega_q\ln(z-z_0),$$

则可得到线电荷密度为 $\omega_1, \omega_2, \cdots$、并垂直于 x-y 平面、且与 x-y 平面相交于 $z_1, z_2, \cdots$的一组线电荷的解。w 的实部就是电势：

$$\varphi = u_P = -\sum_Q 2\omega_Q \ln r_{PQ},$$

式中

$$r_{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}.$$

若电荷分布在 x-y 平面上的投影是一个点集，则在这些点上电势具有对数的奇点。

作为第二个例子，计算由**带电导体楔**产生的电势。我们臆断电势由函数

$$w = z^\mu$$

的虚部给出，式中 μ 为实数并必须适当地确定。对于 $z = re^{i\theta}$，则有

$$\varphi = v = \mathrm{Im} w = r^\mu \sin \mu\theta.$$

因楔是导体[图 11.6]，对所有的 r, r' 必有

$$v(r, \theta = 0) = v(r', \theta = 2\pi - \alpha),$$

所以 $\mu(2\pi - \alpha) = \pi$. 因此，

$$\mu = \frac{\pi}{2\pi - \alpha}.$$

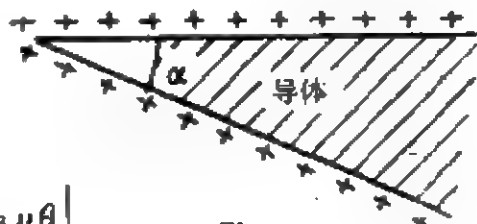


图 11.6

楔上的面电荷密度由下式给出

$$-4\pi\omega = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=0} = \mu r^{\mu-1} \cos \mu\theta \bigg|_{\theta=0} = \mu r^{\mu-1}.$$

包含在半径为 r 的圆内的总电荷 $e(r)$ 为

$$-4\pi e(r) = \int_0^{2\pi-\alpha} \frac{\partial v}{\partial r} r d\theta = -r^\mu \cos \mu\theta \bigg|_{\theta=0}^{\theta=2\pi-\alpha} = +2r^\mu.$$

§ 12. 静磁学

电动力学现象不能仅由电场描述；而且还需要磁场。正如电场与电荷相互作用一样，磁场与所谓磁偶极子相互作用，藉助于后者则能量度磁场。(以后将看到，也可以用运动电荷来量度磁场。)

同电的情况相比，一个非常本质的差别是并不存在磁单极子；它们总是成对地出现的，因此"总磁荷"为零。可以通过把磁偶极子的一个磁极移至足够远处而近似地得到单极子(即，很长的偶极子)。吉伯(Gilbert)曾证明，库仑定律对这些单极子也适用。

仿照静电学，我们引进下列矢量：

磁场强度 $\boldsymbol{H}$，对应于$\boldsymbol{E}$；

磁化强度 $\boldsymbol{M}$，对应于 $\boldsymbol{P}$；

磁感应强度 $\boldsymbol{B}$，对应于 $\boldsymbol{D}$.

除了静磁学中不存在与传导电荷密度 ρ_l，ω_l 相类似的量这一十分重要的差别之外，由磁偶极子产生的场的方程组却对应于静电学的场方程组([2.4]，[8.11]和[7.5])：

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{H}=0 \qquad [12.1]$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{H}+4\pi\boldsymbol{M} \qquad [12.2]$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B}=0 \qquad [12.3]$$

在界面上，分量 H_t 和 B_n 都是连续的。若引进磁(极化)荷的体密度 σ 和面密度 χ，则对应于[8.8]和[8.9]式，有

$$\sigma=-\operatorname{div} \boldsymbol{M}=+\frac{1}{4\pi}\operatorname{div} \boldsymbol{H},$$

$$\chi=-(M_{n_1}+M_{n_2})=+\frac{1}{4\pi}(H_{n_1}+H_{n_2}).$$

同[7.9]式相似，下式也是正确的：

$$\int\sigma \mathrm{d}V+\oint\chi \mathrm{d}f=0.$$

仿照静电学([7.1]式)，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 由本构方程(Constitutive equation)

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}, \qquad [12.4]$$

相关联，式中 μ 为磁导率，并且对应于 ε[A-2]。对于顺磁质 μ 大于 1，并与温度有关；对于抗磁质 μ 小于 1，并与温度无关[A-2]。对于铁磁质，在 $\boldsymbol{B}$ 同 $\boldsymbol{H}$ 之间不存在单值的关系。(例如，当 $\boldsymbol{H}$ 为零时，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 可能不为零。)

由于$\boldsymbol{H}$是无旋的，它能用一个标势来表示：

$$\boldsymbol{H}=-\text{grad}\,\psi.$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 是无源的(无散的)，它能用一个矢势 $\mathbf{A}$ 来表示：①

$$\boldsymbol{B}=\text{curl}\,\mathbf{A}. \qquad [12.5]$$

然而，在相差一个标量函数的梯度的范围内，$\mathbf{A}$ 仍然是任意的。因此，我们甚至能够满足，div $\mathbf{A}=0$ 的条件。

作为例子，求在 z 轴方向、磁矩为 $\boldsymbol{m}$ 的偶极子场的矢势。如从静电学所知，它产生的场为

$$\boldsymbol{H}=m\frac{\partial}{\partial z}\left(\text{grad}\frac{1}{r}\right)=m\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial z},\frac{\partial^2}{\partial y\partial z},\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{1}{r}.$$

式中微分是对场点坐标施行的。

我们臆断 $\boldsymbol{H}$ 的矢势为

$$\mathbf{A}=\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{x}}{r^3}=-\boldsymbol{m}\times\text{grad}\frac{1}{r}. \qquad [12.6]$$

于是，

$$A_x=m\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r},\ A_y=-m\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r},\ A_z=0,$$

所以

$$\text{div}\mathbf{A}=0.$$

---

① 在没有可磁化的物质处，场 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是一致的，从而 $\boldsymbol{A}$ 也是 $\boldsymbol{H}$ 的矢势：$\boldsymbol{H}=\text{curl}\boldsymbol{A}$。

因 $\nabla^2(1/r)=0$，我们得到 $\boldsymbol{H}=\text{curl}\,\boldsymbol{A}$ 的分量为

$$H_x=m\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\frac{1}{r},$$

$$H_y=m\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\frac{1}{r},$$

$$H_z=-m\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{1}{r}=+m\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{r},$$

从而，证明了能用上面给出的 $\boldsymbol{A}$ 来表达 $\boldsymbol{H}$。显然，对于磁化强度的体分布，则有

$$\boldsymbol{A}_P=\int dV_Q\,\frac{\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{x}_{QP}}{r_{QP}^3}=-\int dV_Q\boldsymbol{M}\times\text{grad}_P\frac{1}{r_{QP}},\quad [12.7]$$

按定义，式中单位体积的磁矩 $\boldsymbol{M}$ 是磁化强度。

现在应该指出，除了上面用到的在电的和磁的量间的明显相似性

$$\begin{array}{c|c} \boldsymbol{H} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{M} & \boldsymbol{P} \\ \mu & \varepsilon \end{array}$$

之外，以后将会看到，还存在另一种更基本的相似性，即，

$$\begin{array}{c|c} \boldsymbol{H} & \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E} \\ -\boldsymbol{M} & \boldsymbol{P} \\ 1/\mu & \varepsilon \end{array}$$

§ 13. 单位和量纲

单位和量纲的定义，在一定程度上是一种公认习惯的问题。通过约定某些量是无量纲的方式，能减少基本量纲的个数。例如，能为电荷选定一个新量纲，或者将库仑定律

$$K=k\frac{e^2}{r^2}$$

中的常数 k 选为无量纲的: $[k]=1$, 并从而将电荷归结为厘米, 克和秒的组合。这种定义是任意的。(在万有引力定律

$$F=f\frac{m_1m_2}{r^2}$$

的类似情况中, 若质量、长度和力的量纲已定下来, 则 f 就不是无量纲的了。) 令$[k]=1$, 对应于厘米·克·秒制。此时, 因 $V=ke^2/r$ 代表能量, 电荷的量纲变为

$$[\text{电荷}]=(\text{尔格}\cdot\text{厘米})^{\frac{1}{2}}=([\text{质量}][\text{长度}]^3[\text{时间}]^{-2})^{\frac{1}{2}}$$
$$=(ml^3t^{-2})^{\frac{1}{2}}$$

和

$$[\text{电场强度}]=[\text{电荷}]\text{厘米}^{-2}=(\text{尔格}\cdot\text{厘米}^{-3})^{\frac{1}{2}}$$
$$=(ml^{-1}t^{-2})^{\frac{1}{2}}.$$

电荷的绝对静电单位(esu)是这样定义的, 使得: 当 K 和 r 用厘米·克·秒单位量度时, k 是无量纲的而且等于 1。

另一方面, 若令 $k=1/4\pi$, 便得到亥维赛单位。下文中将用下标 H 表示。这种单位有某些优点。它导致

$$K=\frac{e_H^2}{4\pi r^2},\qquad \text{电场强度}=E_H=\frac{e_H}{4\pi r^2},\qquad e_H=\sqrt{4\pi}\,e,$$

式中, e 为通常静电系单位(esu)中的电荷, 从而

$$\mathbf{E}_H=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\mathbf{E},\quad \mathbf{K}=e\mathbf{E}=e_H\mathbf{E}_H.$$

于是在某些其它方程中并不出现因数 4π:

$$\text{div}\,\mathbf{E}_H=\rho_H\quad\text{代替}\quad\text{div}\,\mathbf{E}=4\pi\rho,$$

而能量表示为

$$W=\frac{1}{8\pi}\int E^2\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int E_H^2\mathrm{d}V.$$

英译者注：另一种常用的单位制是有理化的米·千克·秒（mks）制，或乔吉制．这种单位制具有亥维赛单位所具有的有理化（在许多方程中消除了因数 4π）的优点，而且还导致这样的结果，使得电势、电流和电阻用"实用"单位：伏特、安培和欧姆．

在此单位制中，基本量和基本单位是：长度（米）、质量（千克）、时间（秒）和电量（库仑）．1库仑定义为这样的电量：在相距1米处的两个带有该电量的物体产生的相互作用力为1千克·米/秒^2（≡1牛顿＝10^5达因）．

在有理化米·千克·秒（mks）制中，$k=1/4\pi\varepsilon_0$，其中

$$\varepsilon_0=8.454\times10^{-12}\text{ 库仑}^2\cdot\text{秒}^2\cdot\text{千克}^{-1}\cdot\text{米}^{-3}$$

称为自由空间的电容率．电介质由电容率 $\varepsilon=\varkappa_e\varepsilon_0$ 所表征，其中 $\varkappa_e$ 叫做物质的相对电容率或介电常数．在静磁学中，自由空间的磁导率 $\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ 千克·米·库仑$^{-2}$．仿照电的情况，磁性物质的磁导率写成 $\mu=\varkappa_m\mu_0$．

第二章 稳恒电流

§14. 稳恒电流理论

a. 定义

单位时间内通过导体整个截面的电量叫做电流强度 J:

$$J=\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}. \qquad [14.1]$$

电流密度 i 定义为一个矢量:其方向与电流的方向一致,其量值等于每秒通过垂直于 i 的单位截面的电量。若在一导体中的电流密度与位置无关,则

$$|i|=\frac{J}{q},$$

式中 q 为导体的截面①。由于在法线 n 方向通过面元 $\mathrm{d}f$ 的电流强度为 $i_n\mathrm{d}f$,所以一般地下式成立:

$$J=\int_q i_n\mathrm{d}f. \qquad [14.2]$$

通常,电流强度用电磁单位(emu)量度。然而,也能用静电单位定义。在后一情况中其量纲为

$$[J]=[\text{电量}]\text{秒}^{-1}=(\text{尔格}\cdot\text{厘米}\cdot\text{秒}^{-2})^{\frac{1}{2}}=(ml^3t^{-4})^{\frac{1}{2}},$$

$$[i]=[J]\text{厘米}^{-2}=(\text{尔格}\cdot\text{厘米}^{-3}\cdot\text{秒}^{-2})^{\frac{1}{2}}=(ml^{-1}t^{-4})^{\frac{1}{2}}.$$

b. 连续性方程

根据电荷守恒定律,单位时间内从一闭曲面 F 内流出的电量

① 实为垂直于电流密度的截面。——中译者注

等于单位时间内该闭曲面内电量的减少:

$$\oint_F i_n \mathrm{d}f = -\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \rho \mathrm{d}V. \qquad [14.3]$$

若根据高斯定理将面积分变换为体积分,那么,由于所考察的体积是任意的,于是,显然有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{i} = 0. \qquad [14.4]$$

这一关系式是普遍成立的,称为连续性方程。

在稳恒电流的情况中,按定义,所有的函数都是与时间无关的:$\partial/\partial t \equiv 0$. 于是得到:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{i} = 0, \qquad \oint i_n \mathrm{d}f = 0. \qquad [14.5]$$

c. 欧姆定律

从实验中发现,当物质中有电流时,矢量 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 之间存在着如下的唯象关系:

$$\boldsymbol{i} = \sigma \boldsymbol{E}. \qquad [14.6]$$

式中,σ 为该物质的电导率。上式称为欧姆定律。若假设有一正比于速度的阻力作用在组成电流的运动带电粒子上,则能微观地阐明这一关系。

令 N_+ 和 N_- 分别为单位体积内带正电荷 $+e$ 和负电荷 $-e$ 的粒子数,则,

$$\rho = (N_+ - N_-)e,$$

$$\boldsymbol{i} = N_+ \cdot e \cdot \boldsymbol{v}_+ - N_- \cdot e \cdot \boldsymbol{v}_-,$$

式中 $\boldsymbol{v}_+$ 和 $\boldsymbol{v}_-$ 分别为带正电荷和负电荷的粒子的速度。于是,欧姆定律意味着每一粒子受到一个阻力

$$\boldsymbol{K}_\pm = -w_\pm \boldsymbol{v}_\pm,$$

式中 w 为阻力率[①]。这里的意义是：当

$$\boldsymbol{K}_{\pm}=\mp e\boldsymbol{E},$$

即

$$m\dot{\boldsymbol{v}}=-w_{\pm}\boldsymbol{v}\pm e\boldsymbol{E}=0$$

时，达到稳定状态。实际上，在极短时间内即达到这一稳定状态。于是，

$$\pm\boldsymbol{v}_{\pm}=\frac{e}{w_{\pm}}\boldsymbol{E},$$

由此得到

$$\boldsymbol{i}=\sigma\boldsymbol{E},\quad \text{式中}\quad \sigma=e^2\left(\frac{N_+}{w_+}+\frac{N_-}{w_-}\right). \qquad [14.7]$$

对金属而言，σ 中的第一项实际上等于零。金属中电子受到的摩擦力正比于它们相对于正离子点阵的速度。

电导率的量纲为[②]

$$[\sigma]=\text{秒}^{-1}.$$

只要电流与时间无关，就仍然有

$$\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}\,\varphi,\quad \mathrm{curl}\,\boldsymbol{E}=0,$$

即，从环绕闭合路径运动的带电粒子获取功是不可能的。

对于均匀导体(即，由均匀材料构成的、具有恒定截面积 q 的导体)，欧姆定律取实验物理学中常用的形式(参见图 14.1)：

$$\varphi_1-\varphi_2=l|\boldsymbol{E}|,$$
$$J=q|\boldsymbol{i}|,$$

即

$$\varphi_1-\varphi_2=JR, \qquad [14.8]$$

① 原文为 specific resistance，按通用译名应为电阻率。但此处并非我们通常的电阻率 $1/\sigma$(σ 为电导率)，按其物理意义姑且译为阻力率，以示区别。——中译者注

② 采用静电单位。



图 14.1

式中 $R=l/(\sigma q)$。电阻 R 与导体的大小有关。

如我们即将看到的，[14.8]式对于任意形状的导体也是成立的。然而，在这种情况中，R 不能如此简单地表达出来。

电阻的量纲为①

$$[R]=[\sigma\ 厘米]^{-1}=厘米^{-1}\cdot 秒=1/速度.$$

d. **单位**

电流强度：

1 电磁单位(emu)＝3×10^{10} 静电单位(esu)＝10 安培；

1 安培＝0.1 emu＝3×10^{9}esu

电势： 1 esu＝3×10^{10}emu＝300 伏特；

1 伏特＝10^{8}emu＝1/300esu.

电阻： 1 欧姆＝1 伏特/1 安培＝10^{9}emu＝$1/(9\times10^{11})$esu.

e. **焦耳定律**

凡电流流过的地方都产生热，而且单位时间单位体积所释放的热量为②

$$Q=\mathbf{i}\cdot\mathbf{E}=\sigma E^2 \qquad [14.9]$$

由于

$$[\sigma E^2]=尔格\cdot(秒\cdot厘米^3)^{-1},$$

① 采用静电单位。

② 此式采用能量的单位，例如尔格，焦耳，而不是通常的热量单位卡。——中译者注

所以量纲是正确的。

这一定律也可以从微观角度的考虑而获得。作用在一个粒子上的力 $\boldsymbol{K}=e\boldsymbol{E}$ 单位时间所作的功为

$$\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{v}=e(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}).$$

所以单位时间单位体积的功为

$$e\cdot(N_+\boldsymbol{v}_+-N_-\boldsymbol{v}_-)\cdot\boldsymbol{E}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{E}.$$

这一在导体内反抗阻力所消耗的功完全转化为热，称为焦耳热。

长度为 l、横截面为 q 的均匀导体每秒所释放的总热量为

$$\bar{Q}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{E}ql=J(\varphi_1-\varphi_2)=J^2R. \qquad [14.10]$$

我们将会看到，表达式 $J(\varphi_1-\varphi_2)$ 和 J^2R 对于任意导体也是正确的。

单位时间所释放的热量(=功率=能量/时间)的单位为

1 伏特·1 安培=1 瓦特=10^7 尔格·秒$^{-1}$=1 焦耳/秒。

***f*. 导体中的电流**

在由均匀材料制成的导体中，σ 与位置无关，所以有

$$\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}\varphi,\quad \boldsymbol{i}=\sigma\boldsymbol{E}=-\sigma\operatorname{grad}\varphi,$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{i}=0,\qquad \operatorname{div}\boldsymbol{E}=0,\quad \nabla^2\varphi=0,$$

因此 $\rho=0$。然而，一般来说存在面电荷。而且在导体表面上

$$i_n=-\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0.$$

在非均匀材料构成的导体中，我们有

$$\operatorname{div}(\sigma\operatorname{grad}\varphi)=0\qquad(\rho\neq0). \qquad [14.11]$$

这一方程同流体力学中的势流方程极为相似。所以电流的流线恰似流体力学中的势流的流线。

从数学的观点来说，电流分布的问题如下所述：

两电极间的电势差 $\varphi_1-\varphi_2$ 已给定。在表面上，$\sigma(\partial\varphi/\partial n)=0$。在

内部，我们有微分方程[14.11]。这些要求决定了电流分布[A-3]。由于 $\sigma(\partial\varphi/\partial n)$ 只在电极 1 和 2 上不为零，所以由高斯定律得到

$$+\int_1 \sigma\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}f=-\int_2 \sigma\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}f=J.$$



图 14.2

对于给定的几何形状，若 φ 乘以一常数因数，则电流强度也被乘以同一因数。由此可见，对于任意导体，下式成立：

$$\varphi_1-\varphi_2=JR.$$

现在我们也能以更普遍的方式证明焦耳定律了。导体中产生的总热量为

$$\bar{Q}=\int\sigma E^2\mathrm{d}V=\int\mathbf{i}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V=-\int\mathbf{i}\cdot\mathrm{grad}\,\varphi\mathrm{d}V$$

$$=+\int\varphi\,\mathrm{div}\mathbf{i}\mathrm{d}V-\int\mathrm{div}(\varphi\mathbf{i}))\mathrm{d}V=-\oint\varphi i_n\mathrm{d}f.$$

因为，只是在两电极上 $i_n\neq0$，所以我们有

$$\bar{Q}=(\varphi_1-\varphi_2)J=J^2R.$$

若存在多个电极，则其结果为上式之和。

§ 15. 稳恒电流的磁场

我们暂且再把磁场看作是能用磁偶极子测量的。

奥斯忒在他的著名实验中发现：沿环绕电流的闭合曲线所取的稳恒电流所产生的磁场强度的线积分由下式给出

$$\oint H_s\mathrm{d}s=\frac{4\pi}{c}J=4\pi J_{emu}. \qquad [15.1]$$

式中 c 为光速，J 为静电单位制的电流强度，而 J_{emu} 为电磁单位制的电流强度。对于无限长载流柱体，在柱坐标①中，柱体外磁场强度的径向分量和角分量分别为

$$H_r=0,\ H_\varphi=\frac{2J}{c}\frac{1}{r}. \qquad [15.2]$$

绕行指向和电流流向之间的关系如图 15.1 所示。然而，只当 $\boldsymbol{H}$ 被看作是矢量时这种关联才是必要的。反之，若将 $\boldsymbol{H}$ 看作反对称张量，则这种关联便不必要了。

由于 $\boldsymbol{H}$ 的引出类似于电场强度，$\boldsymbol{H}$ 的量纲为

$$[H]=[E]=\text{电量}\cdot\text{厘米}^{-2},$$

由

$$[J]=\text{电量}\cdot\text{秒}^{-1},$$

于是得到

$$[c]=\text{厘米}\cdot\text{秒}^{-1}.$$

因此，c 确实具有速度的量纲。

图 15.1　电流 J 流向纸面外

我们将上述那些关系看作是稳恒电流的基本定律。对应于 $\boldsymbol{E}$ 的方程为

$$\oint E_n \mathrm{d}f=4\pi e,\quad \mathrm{curl}\boldsymbol{E}=0,$$

这里我们有关于 $\boldsymbol{H}$ 的类似定律：

$$\oint H_s \mathrm{d}s=\frac{4\pi}{c}J,\quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{H}=0. \qquad [15.3]$$

$\left(\text{因为} \oint_{\text{柱面}} H_n \mathrm{d}f=2\pi r H_r=0,\ \text{所以}\ \boldsymbol{H}\ \text{的第二个方程要求}\ H_r=0\text{。}\right)$

定律[15.1]不仅在导体外成立，而且在导体内部也成立：

$$\oint_C H_s \mathrm{d}s=\frac{4\pi}{c}J_F=\frac{4\pi}{c}\int_F i_n \mathrm{d}f, \qquad [15.4]$$

① 英译本误为"极坐标"。——中译者注

式中 J_F 为流过由任意曲线 C 所包围的曲面 F 的电流强度。若导体是圆柱对称的（半径为 a），则我们知道，在稳恒态情况下电流密度是均匀的[A-3]。若曲线 C 为一半径为 r 的圆，则有

$$J_F=J\left(\frac{r}{a}\right)^2, \qquad (r<a),$$

$$2\pi rH_\varphi=\frac{4\pi}{c}J\left(\frac{r}{a}\right)^2: \quad \begin{cases} H_\varphi=\dfrac{2J}{c}\dfrac{r}{a^2}, (r\leqslant a), \\ H_\varphi=\dfrac{2J}{c}\dfrac{1}{r}, (r\geqslant a). \end{cases}$$

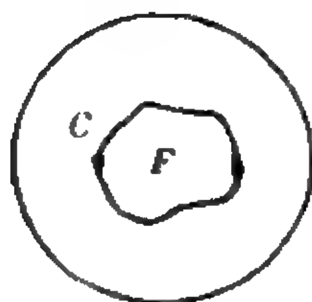


图 15.2

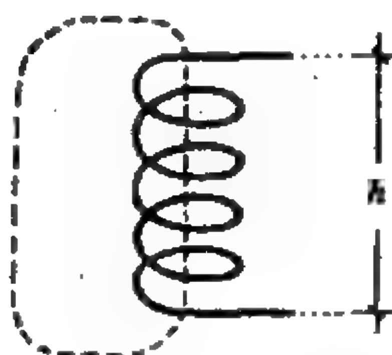


图 15.3

应用：螺线管。我们假定匝距远小于其长度 h 和直径。在这一极限情况中，我们能用一个在螺线管内部是均匀的、而在其外部为零的磁场作为实际磁场的粗略近似。对于如图 15.3 所示的积分路径，于是有

$$\int i_n \mathrm{d}f=NJ; \qquad \oint H_s \mathrm{d}s=Hh=\frac{4\pi}{c}NJ,$$

式中 N 为匝数，J 为每匝的电流强度。从而

$$H=\frac{4\pi N}{h}\frac{J}{c}. \qquad [15.5]$$

螺线管内的磁场强度正比于电流强度。

正如方程式 $\oint E_n \mathrm{d}f=4\pi e$，与之对应有等效的条件 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=$

$4\pi\rho$，对应于积分定律$\oint H_s ds = 4\pi J_F/c$（[15.4]式），也存在与它等效的微分定律。根据斯托克斯定理，我们有

$$\int \text{curl}_n \boldsymbol{H} df = \frac{4\pi}{c}\int i_n df.$$

由于此式对完全任意的曲面都成立，所以有

$$\text{curl}\,\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i} = 4\pi \boldsymbol{i}_{emu}. \qquad [15.6]$$

这是在给定稳恒电流时确定其磁场的微分定律。

重要记注。我们已看到，对于任一矢量$\boldsymbol{a}$，$\text{div}\,\text{curl}\,\boldsymbol{a}=0$。所以只当$\text{div}\,\boldsymbol{i}=0$时微分定律[15.6]才是正确的。然而，对于非稳恒情况，由于一般地$\partial\rho/\partial t \neq 0$，$\text{div}\,\boldsymbol{i}=0$不再成立。因此，在这种情况中，[15.6]式所表示的$\boldsymbol{i}$与$\boldsymbol{H}$的关系也不再是正确的了。

利用矢势$\boldsymbol{A}$计算$\boldsymbol{H}$

若令

$$\boldsymbol{H} = \text{curl}\boldsymbol{A}, \qquad [15.7]$$

则条件$\text{div}\,\boldsymbol{H}=0$自动地被满足。现在必须来确定矢势$\boldsymbol{A}$。如在§12中曾提到的，在相差一个标量函数的梯度范围内$\boldsymbol{A}$是任意的。即，对于

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \text{grad}\,\psi$$

（式中ψ是任意的标量函数），$\boldsymbol{H}=\text{curl}\,\boldsymbol{A}'$仍然成立。例如，通过要求

$$\text{div}\,\boldsymbol{A} = 0, \qquad [15.8]$$

能够确定函数ψ。对于稳恒电流的情况，这是相当方便的。

由于矢量恒等式

$$\text{curl}\,\text{curl}\,\boldsymbol{a} \equiv \text{grad}\,\text{div}\boldsymbol{a} - \nabla^2\boldsymbol{a}, \qquad [15.9]$$

矢势必须满足如下条件

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A}-\nabla^2\boldsymbol{A}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i}. \qquad [15.10]$$

(式中采用的符号 ∇^2 代表用笛卡儿坐标表示的拉普拉斯算符，并作用于矢量 $\boldsymbol{a}$ 的每一个分量。在曲线坐标中，情况稍许复杂些。)若满足下述条件：

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0,\quad \nabla^2\boldsymbol{A}=-\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i}, \qquad [15.11]$$

则[15.10]式亦满足。[15.11]式的第二个方程的每一分式与[3.5]式 $\nabla^2\varphi=-4\pi\rho$ 相似，而后者的解已知为：$\varphi_P=\int\rho_Q dV_Q/r_{PQ}$.所以

$$\boldsymbol{A}_P=\frac{1}{c}\int\frac{\boldsymbol{i}_Q dV_Q}{r_{PQ}}. \qquad [15.12]$$

我们还要证明 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0$。两次应用恒等式[4.10]

$$\operatorname{div}(f\boldsymbol{a})\equiv f\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{grad}f,$$

我们得到

$$\operatorname{div}_P\left(\frac{\boldsymbol{i}_Q}{r_{PQ}}\right)=\left(\operatorname{grad}_P\frac{1}{r_{PQ}}\right)\cdot\boldsymbol{i}_Q=-\left(\operatorname{grad}_Q\frac{1}{r_{PQ}}\right)\cdot\boldsymbol{i}_Q$$

$$=-\operatorname{div}_Q\left(\frac{\boldsymbol{i}_Q}{r_{PQ}}\right)+\frac{1}{r_{PQ}}\operatorname{div}_Q\boldsymbol{i}.$$

由此，并考虑到 $i_n=0$ 和 $\operatorname{div}\boldsymbol{i}=0$，于是有

$$\operatorname{div}_P\boldsymbol{A}=-\frac{1}{c}\int\operatorname{div}_Q\left(\frac{\boldsymbol{i}_Q}{r_{PQ}}\right)dV_Q+\frac{1}{c}\int\frac{1}{r_{PQ}}(\operatorname{div}\boldsymbol{i})_Q dV_Q$$

$$=-\frac{1}{c}\oint\frac{i_n}{r_{PQ}}df_Q+\frac{1}{c}\int\frac{1}{r_{PQ}}(\operatorname{div}\boldsymbol{i})_Q dV_Q=0.$$

欲由 $\boldsymbol{A}$ 计算 $\boldsymbol{H}$，现在我们应用恒等式

$$\operatorname{curl}(f\boldsymbol{a})\equiv f\operatorname{curl}\boldsymbol{a}+\operatorname{grad}f\times\boldsymbol{a}, \qquad [15.13]$$

并考虑到 curl_P 对 $\boldsymbol{i}_Q$ 无作用，于是得到

$$\boldsymbol{H}_P=\operatorname{curl}_P\boldsymbol{A}=\frac{1}{c}\int\operatorname{grad}_P\frac{1}{r_{PQ}}\times\boldsymbol{i}_Q dV_Q,$$

从而

$$\boldsymbol{H}_P=\frac{1}{c}\int \boldsymbol{i}_Q\times\frac{(\boldsymbol{x}_P-\boldsymbol{x}_Q)}{r_{PQ}^3}\mathrm{d}V_Q=\frac{1}{c}\int \boldsymbol{i}_Q\times\frac{\boldsymbol{t}}{r_{PQ}^2}\mathrm{d}V_Q, \qquad [15.14]$$

式中 $\boldsymbol{t}$ 代表单位矢量 $\boldsymbol{t}=(\boldsymbol{x}_P-\boldsymbol{x}_Q)/r_{PQ}$。

极限情况：导线

对于其截面的线度远小于其长度的导体，能够应用下述的理想化数学方法(虽然，它并非总是允许的)。

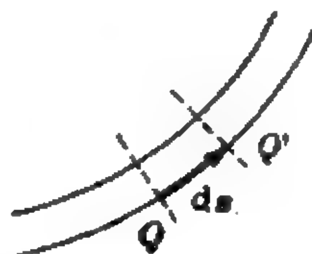


图 15.4

令 Q 为导体的截面，ds 为线元(参见图 15.4)。由于 $\boldsymbol{i}$ 平行于 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$，所以，

$$\int_{(导体)}\boldsymbol{i}\mathrm{d}V=\int_{(导体)}\boldsymbol{i}\mathrm{d}f|\mathrm{d}\boldsymbol{s}|=\int_s\int_Q i_n\mathrm{d}f\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_s J\mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$

于是有

$$\boldsymbol{A}_P=\frac{J}{c}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}_Q}{r_{PQ}} \qquad [15.15]$$

和

$$\boldsymbol{H}_P=\frac{J}{c}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}_Q\times(\boldsymbol{x}_P-\boldsymbol{x}_Q)}{r_{PQ}^3}=\frac{J}{c}\int\mathrm{d}\boldsymbol{s}_Q\times\frac{\boldsymbol{t}}{r_{PQ}^2}. \qquad [15.16]$$

这一表达式以毕奥-萨伐尔定律的名称而为人们所熟知。

人们常说，电流元 $J\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 产生的磁场强度为

$$“\mathrm{d}\boldsymbol{H}”=\frac{J}{c}\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\frac{\boldsymbol{t}}{r^2}.$$

然而，由于电流元不满足连续性方程，所以，这样定义的“$\mathrm{d}\boldsymbol{H}$”不满足我们作为出发点的方程组。实际上并不存在孤立的电流元。所以，毕奥-萨伐尔定律只能应用于闭合迴路或无限长导体，可以认为后者在无穷远处是闭合的。

作为验证，我们将毕奥-萨伐尔定律应用于无限长导线(图15.5)。若这样选择坐标，使 ds 平行于 z 轴，则 $x_P-x_Q=r=$常数，于是有

$$H_y=\frac{J}{c}r\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{(z^2+r^2)^{3/2}}=\frac{J}{c}r\cdot\frac{z\frac{1}{r^2}}{(r^2+z^2)^{1/2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}=2\frac{J}{c}\frac{1}{r}.$$

这正是我们曾在[15.2]式中得到过的公式。

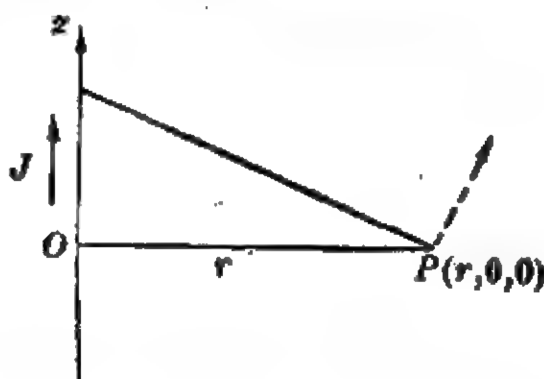


图 15.5

§16. 闭合电流回路的磁场与磁偶极子分布的磁场的等效性

我们首先对由闭合线电流迴路产生的矢势进行变换，这将引出磁矩的概念。为此，需要一个特殊形式的斯托克斯定理。按照[15.13]式，对于同位置无关的一个矢量 $\boldsymbol{a}$，有

$$\text{curl}(f\boldsymbol{a})=\text{grad}\,f\times\boldsymbol{a}.$$

对矢量 $f\boldsymbol{a}$(其中 $\boldsymbol{a}$ 为恒矢)应用斯托克斯定理([2.5]式)，我们得到①

$$\oint(f\boldsymbol{a})\cdot d\boldsymbol{s}=\int(\text{grad}\,f\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}df,$$

① 下面几个式子中标量 f 与面元 df 中的 f 符号相同，切勿混淆。——中译者注

$$a\cdot\oint f\mathrm{d}s=a\cdot\int n\times\mathrm{grad}f\mathrm{d}f.$$

由于 a 为任意矢量，所以下式必定成立

$$\oint f\mathrm{d}s=\int n\times\mathrm{grad}\,f\mathrm{d}f. \qquad [16.1]$$

对矢势 $A_P=(J/c)\oint \mathrm{d}s_Q/r_{PQ}$，此积分定理给出

$$A_P=\frac{J}{c}\int n\times\mathrm{grad}_Q\frac{1}{r_{PQ}}\mathrm{d}f. \qquad [16.2]$$

式中只有积分面的边界曲线(即导电迴路)已确定，而积分面本身是任意的。另一方面，在§12中我们曾看到，具有磁矩 m 的偶极子的矢势为

$$A_P=m\times\mathrm{grad}_Q\frac{1}{r_{PQ}}. \qquad [16.3]$$

于是，我们看到，由一闭合线电流迴路所产生的矢势，从而其磁场，等效于每单位面积具有磁矩

$$m=\frac{J}{c}n$$

的偶极子的一个面分布所产生的磁场，式中 n 为曲面的法线。除边界曲线由电流迴路确定外，该曲面的选择是任意的。

特殊情况：平面电流迴路。我们选择迴路所环绕的平面作为积分面。在此面上磁矩的分布是均匀的。若场点距电流很远：$r_{PQ}\gg a$，其中 a，例如，为迴路的直径，则得到进一步的简化。于是，对于面上的所有点 Q，能够用 r_{PO} 来代替 r_{PQ}，此处 O 为面上的任一固定点。若 F 为该面的面积，则

$$A_P=-\frac{J}{c}Fn\times\mathrm{grad}_P\frac{1}{r_{PO}}=-M\times\mathrm{grad}_P\frac{1}{r_{PO}},$$

$$M=\frac{J}{c}Fn.$$

于是，在远距离处，闭合电流回路的磁场等效于具有如上式所给出的磁矩 $\boldsymbol{M}$ 的磁偶极子的磁场。

我们即将看到，方才对电流回路所作的讨论也能够类似地应用于电流的体分布。这些等效性是安培发现的。实际上，产生磁场的并不是磁偶极子，而是电流回路，这也是安培的见解。在这一理论中，磁偶极子并不是基本量；相反，磁性起源于分子和原子内部的微观电流(叫做安培电流)。

我们现在将上述思路推广而来考察偶极子的体分布。令$\boldsymbol{M}$代表单位体积的磁矩(磁化强度)，则所产生的场的矢势为

$$\boldsymbol{A}=\int \boldsymbol{M}\times \mathrm{grad}_Q\frac{1}{r}\mathrm{d}V. \qquad [16.4]$$

我们希望将上式变换为

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{c}\int\frac{\boldsymbol{i}_m}{r}\mathrm{d}V+\frac{1}{c}\int\frac{\boldsymbol{j}_m}{r}\mathrm{d}f. \qquad [16.5]$$

此式代表由分子体电流 $\boldsymbol{i}_m$①和分子面电流 $\boldsymbol{j}_m$ 所产生的矢势。为了进行这一变换，我们需要一个以如下方式从高斯定理导出的积分定理：由于恒等式

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\equiv\boldsymbol{b}\,\mathrm{curl}\,\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\,\mathrm{curl}\,\boldsymbol{b}, \qquad [16.6]$$

利用一个恒矢 $\boldsymbol{a}$，高斯定理[2.9]给出

$$\boldsymbol{a}\cdot\oint\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{n}\mathrm{d}f=\oint(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}f=-\boldsymbol{a}\cdot\int\mathrm{curl}\boldsymbol{b}\mathrm{d}V.$$

由于 $\boldsymbol{a}$ 是任意的，所以有

$$\oint\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{b}\mathrm{d}f\equiv\int\mathrm{curl}\boldsymbol{b}\mathrm{d}V. \qquad [16.7]$$

藉助于这一积分表达式，并考虑到

$$\mathrm{curl}(f\boldsymbol{a})=f\mathrm{curl}\boldsymbol{a}+\mathrm{grad}f\times\boldsymbol{a},$$

① 这里 i_m 和 j_m 实际上分别为分子体电流密度和面电流密度。——中译者注

则由[16.4]式得到

$$\boldsymbol{A}=\int \frac{1}{r}\operatorname{curl}\boldsymbol{M}dV-\int \operatorname{curl}\left(\frac{\boldsymbol{M}}{r}\right)dV$$
$$=\int \frac{1}{r}\operatorname{curl}\boldsymbol{M}dV-\oint \frac{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{M}}{r}d\boldsymbol{f}.$$

所以,磁化强度的体分布等效于体电流密度 $\boldsymbol{i}_m$ 和面电流密度 $\boldsymbol{j}_m$,其中

$$\boldsymbol{i}_m=c\operatorname{curl}\boldsymbol{M}, \qquad [16.8]$$

$$\boldsymbol{j}_m=-c\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{M}. \qquad [16.9]$$

上文考察的线电流迴路的情况作为特殊情况包含在这个结果中。(在导体内部$\boldsymbol{M}$是恒矢; 过渡到二维情况, 面电流转变为线电流,并且存在每单位面积的磁矩,而不是单位体积的磁矩。)

分子电流 $\boldsymbol{i}_m$ 和 $\boldsymbol{j}_m$ 与磁矩分布的等效性表明将磁性归因于这种分子电流的可能性,正如安培所断言的那样。

为了同分子电流相区别, 我们将上文简单地称做“电流”的量命名为传导电流,并将相应的电流密度写作 $\boldsymbol{i}_c$。此外,还有第三种电流,即所谓运流电流,它是由宏观电荷的运动形成的。若 ρ 为运动物体的体电荷密度,$\boldsymbol{v}$ 为其速度,则运流电流密度由下式给出

$$\boldsymbol{i}_k=\rho\boldsymbol{v}. \qquad [16.10]$$

罗兰曾由实验证明, 由这种运流电流产生的磁场与通常的传导电流产生的磁场完全相同;即下式成立

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{H}=\frac{4\pi}{c}(\boldsymbol{i}_c+\boldsymbol{i}_k). \qquad [16.11]$$

这几段中所讨论的分子电流同磁矩分布的等效性论证了§12中所述的关于电介质的第二种相似性。即, 微观磁场强度的平均值必须认为是与磁感应强度$\boldsymbol{B}$等同, 而不是与$\boldsymbol{H}$等同。这一论断可由下述事实获得:对于稳恒情况,

(1) $\operatorname{div} \boldsymbol{B}=0$,

$$(2)\ \operatorname{curl} \boldsymbol{B}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i}=\frac{4\pi}{c}(\boldsymbol{i}_c+\boldsymbol{i}_k+\boldsymbol{i}_m). \qquad [16.12]$$

[16.12]式是根据[12.2]式的关系$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{H}+4\pi\boldsymbol{M}$以及关于 $\operatorname{curl}\boldsymbol{H}$ 和$\operatorname{curl}\boldsymbol{M}$ 的[16.11]和[16.8]两式导出的。



图 16.1

若存在面电流 $\boldsymbol{j}_m$，则磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 具有不连续的切向分量。对如图 16.1 所示的积分路径应用斯托克斯定理，求得

$$\boldsymbol{B}_{\parallel}^{(i)}-\boldsymbol{B}_{\parallel}^{(e)}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{j}_m=4\pi\boldsymbol{M}_{\parallel}. \qquad [16.13]$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 为法向单位矢，$\boldsymbol{M}_{\parallel}$ 为 $\dot{\boldsymbol{M}}$ 在曲面上的切向分量。

因此，$\boldsymbol{B}$ 场的旋度由存在的全部电流给出。类似地，$\boldsymbol{E}$的源头(散度)由存在的全部电荷确定，而且$\boldsymbol{E}$是微观电场强度的平均值。所以，在这种较深刻的相似性的意义上，$\boldsymbol{B}$ 对应于$\boldsymbol{E}$。然而，$\boldsymbol{B}$ 是无源涡旋场，而$\boldsymbol{E}$(在准静态中)是无旋有源场。(所以算符 curl 与 div 亦须彼此对换。)

同$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{E}+4\pi\boldsymbol{P}$类似，按照安培的观点，$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}-4\pi\boldsymbol{M}$只是一个辅助量。在界面上，$\boldsymbol{B}$ 的法向分量是连续的，而 $\boldsymbol{H}$ 具有连续的切向分量。所以，磁的量与电的量之间的更为本质的相似性为

$$\begin{array}{r|l} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{H} & \boldsymbol{D} \\ -\boldsymbol{M} & \boldsymbol{P} \end{array}$$

§ 17. 有质动力

直到现在，我们已定义了 $\boldsymbol{H}$ 为作用在单位磁极上的力。然而，也能用作用在载流导体元上的力来定义 $\boldsymbol{H}$。磁场作用在导体上的力叫做磁有质动力。

导体 L 作用在 P 点处（图 17.1）的单位磁极上的力为

$$\boldsymbol{K}_P=\frac{1}{c}\int\frac{\boldsymbol{i}_Q\times(\boldsymbol{x}_P-\boldsymbol{x}_Q)}{r_{PQ}^3}\mathrm{d}V_Q. \qquad [17.1]$$



图 17.1

另一方面，该单位磁极在导体上 Q 点处所产生的磁场强度为

$$\boldsymbol{H}_{QP}=\frac{\boldsymbol{x}_Q-\boldsymbol{x}_P}{r_{PQ}^3}.$$

根据作用和反作用原理（作用＝反作用），在 P 点处的单位磁极作用在导体上的力必须满足

$$\boldsymbol{K}_L=\int\boldsymbol{k}_{QP}\mathrm{d}V_Q=-\boldsymbol{K}_P,$$

式中 $\boldsymbol{K}_L$ 为总力（即遍及所有的 Q 点积分而得的力）。因此

$$\boldsymbol{K}_L=\frac{1}{c}\int\mathbf{i}_Q\times\boldsymbol{H}_{QP}\mathrm{d}V_Q.$$

于是，磁场强度 $\boldsymbol{H}_{QP}$ 作用在体积元 $\mathrm{d}V_Q$ 上的力似乎由 $(1/c)\cdot(\mathbf{i}_Q\times\boldsymbol{H}_{QP})\mathrm{d}V_Q$ 给出。然而，这一考虑只是探索性的。首先，尽管单位磁极的假设不是令人十分满意的，但是，如果第二个磁极是足够远，毕竟还能实现。然而，上述考虑何以不可能是严密的主要原

因在于：作用和反作用原理仅适用于整个导体，而并不能根据它求得作用于个别体积元上的力。

然而，已证明，单位体积的力确实为

$$\boldsymbol{k}=\frac{1}{c}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{H}. \qquad [17.2]$$

这是自然界的一个新基本定律。由此得知，作用于导体线元 $d\boldsymbol{s}$ 上的磁力为

$$d\boldsymbol{K}=\frac{J}{c}d\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{H}. \qquad [17.3]$$

由此能够证明：位于均匀磁场 $\boldsymbol{H}$ 中的载流为 J 的导线迴路所经受的转矩与作用在磁矩为 $\boldsymbol{M}=(J/c)\int_F \boldsymbol{n}df$ 的刚性磁偶极子上的转矩相同；即 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{H}$。安培仔细地研究了作用在导体上的这些磁有质动力，并由此证实了在闭合电流迴路与偶极子分布之间（以及关于这些力的效应）的完全等效性。

对于运流电流 $\boldsymbol{i}_k=\rho\boldsymbol{v}$（其中 ρ 为运动物体的体电荷密度，$\boldsymbol{v}$ 为其速度），上述关于力的定律也成立。于是，作用在具有电荷 $e=\int\rho dV$ 的物体上的总力 $\boldsymbol{K}=\int\boldsymbol{k}dV$ 为

$$\boldsymbol{K}=\frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}. \qquad [17.4]$$

这个力以荷兰物理学家 H. A. 洛伦兹的名字命名为洛伦兹力。正如 $\boldsymbol{E}$ 能由静止电荷定义和量度那样，$\boldsymbol{H}$ 能藉助于运动电荷来定义和量度。

因此，在电场和磁场同时存在的普遍情况中，下述力的定律成立：运动的带电物体每立方厘米上所受的力是由下述两个部分组成的

$$\boldsymbol{k}_e=\rho\boldsymbol{E} \quad (\text{电力}),$$

和 [17.5]

$$k_m=\frac{1}{c}i\times H \quad (\text{磁力}).$$

式中 i 为总电流密度，如果存在运流电流，也包含在内。这一定律是十分普遍地成立的，并不局限于稳恒电流的情况。

作用在电荷 e 上的总力包含下述两个部分

$$K_e=eE$$

和 [17.6]

$$K_m=\frac{e}{c}v\times H.$$

上述定律已由阴极射线（电子）在电场和磁场中的偏转而得到确证。还必须注意，由于洛伦兹力垂直于速度的方向，所以它并不作功。

若 H_1 是由闭合线电流回路(用 2 来标记)所产生的，则

$$H_1=\frac{J_2}{c}\oint_2\frac{ds_2\times(x_1-x_2)}{r_{12}^3}, \quad [17.7]$$

而作用在另一导体(用 1 来标记)的线电流元 ds_1 上的磁力为

$$dK_m^{(1)}=\frac{J_1J_2}{c^2}\oint_2\frac{ds_1\times(ds_2\times(x_1-x_2))}{r_{12}^3}. \quad [17.8]$$

这就是我们根据经验所能说的全部(线元 ds_1 是能运动的)。反之，若略去积分而探求确定两电流元相互作用的基本定律，则是危险的。在麦克斯韦理论发表以前，人们确曾按"超距作用"的观点这样做过。然而，这样做时，由于其它导体元的贡献不能略去，所以人们超出了实验所能确定的范围。因此，解答不是唯一的。对于这一基本定律所能要求的只是：对它积分，必须给出[17.8]式。例如，格拉斯曼(Grassman)曾得到这个"基本定律"

$$dK_m^{(1,2)}=\frac{J_1J_2}{c}\frac{ds_1\times(ds_2\times n_{21})}{r_{12}^2},$$

式中
$$n_{21}=\frac{x_1-x_2}{r_{12}}.$$
将上式对 ds_2 积分，则得[17.8]式。但是，它表明
$$dK_m^{(1,2)}\neq-dK_m^{(2,1)}.$$
然而，对于整个导体，作用和反作用原理仍然是成立的。另外，还有一些能导致相同结果的“基本定律”。

在历史上，最早的形式是安培根据如下的一些公理建立的：$dK^{(1,2)}$ 应具有 $n_{12}=(x_2-x_1)/r_{12}$ 的方向，应是 ds_1 和 ds_2 的双线型，并且对于 r_{12}, ds_1 和 ds_2 应是零级齐次的。因此，它必须具有如下的形式
$$dK^{(1,2)}=\frac{J_1J_2}{c^2}\frac{n_{12}}{r_{12}^2}\{\alpha(ds_1\cdot ds_2)+\beta(ds_1\cdot n_{12})(ds_2\cdot n_{12})\}.$$
根据[17.8]式，系数 α, β 由下述要求确定：
$$\oint_2 dK^{(1,2)}\equiv dK_m^{(1)}.$$

由于在非稳恒电流的情况中，很难说磁场（它实际是力的量度）由哪个电流元产生。所以这些“基本定律”完全缺乏物理意义。从场论的观点来看，人们不能探索这样的“基本定律”。

§18. 电力和磁力的作用和反作用原理．麦克斯韦应力张量

在本节中只考虑电荷和电流的体分布。

首先介绍张量的概念。一个三维空间中的张量是满足如下要求的九个量 $T_{ik}(i,\ k=1,\ 2,\ 3)$ 的一个系统：当坐标系变换时，它们应象两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的分量的积 a_ib_k 那样变换。（然而，不需要 T_{ik} 能表示为 a_ib_k 的形式。）一个张量可能具有特殊的对称性：
$$T_{ik}=T_{ki},\quad \text{对称张量};$$

$$S_{ik}=-S_{ki}, \text{ 反对称张量。}$$

若只考虑坐标系的转动而不考虑反演①，则三维空间的反对称张量象矢量一样地变换。由于 S_{ik} 象 $a_ib_k-a_kb_i$ 那样地变换，所以反对称张量象矢量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 那样地变换。

力是一般矢量(极矢)，电流密度 $\boldsymbol{i}$ 亦然。因此，根据[17.2]式，$\boldsymbol{H}$ 显然是反对称张量。也能从毕奥-萨伐尔定律[15.16]式看出这一点。本来应该把 H_x，H_y 和 H_z 分别写成 H_{23}，H_{31} 和 H_{12} (以及 $H_{ik}=-H_{ki}$)。而电场强度则为一般矢量。

我们用下列矢量表征张量 $\mathscr{T}$ 与单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 的标积：

$$\boldsymbol{T}_n\equiv(T_{n1},T_{n2},T_{n3}),$$

其中

$$T_{ni}=\sum_k T_{ik}n_k \qquad (i=1,2,3).$$

我们立即会看出，T_{ni} 如矢量的分量一样变换。

高斯定理具有如下形式

$$\int\sum_k\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}\mathrm{d}V=\oint\sum_k T_{ik}n_k\mathrm{d}f, \qquad [18.1]$$

也能写成

$$\int\mathrm{div}\mathscr{T}\mathrm{d}V=\oint\boldsymbol{T}_n\mathrm{d}f, \qquad [18.2]$$

式中

$$\mathrm{div}\mathscr{T}=\left(\sum_k\frac{\partial T_{1k}}{\partial x_k},\sum_k\frac{\partial T_{2k}}{\partial x_k},\sum_k\frac{\partial T_{3k}}{\partial x_k}\right). \qquad [18.3]$$

若 $\boldsymbol{k}_e$ 和 $\boldsymbol{k}_m$ 能表示为

$$\boldsymbol{k}_e=\mathrm{div}\mathscr{T}^{(e)},\quad \boldsymbol{k}_m=\mathrm{div}\mathscr{T}^{(m)}, \qquad [18.4]$$

---

① 参见 §2 的讨论。

其中 $\mathscr{T}^{(e)}$ 和 $\mathscr{T}^{(m)}$ 应在无穷远处充分快地趋于零，使得，当积分域的界面变成无穷大时

$$\int \boldsymbol{k}_e \mathrm{d}V = \oint \boldsymbol{T}_n^{(e)} \mathrm{d}f \longrightarrow 0$$

和 [18.5]

$$\int \boldsymbol{k}_m \mathrm{d}V = \oint \boldsymbol{T}_n^{(m)} \mathrm{d}f \longrightarrow 0,$$

则不仅电力，而且磁力也满足作用和反作用原理。

现在我们来证明，稳恒电流和静止电荷(即与时间无关的场)都满足作用和反作用原理。为此，我们利用前面已导出的[17.5]，[3.4]，[2.4]，[15.6]和[15.3]诸关系式：

$$\boldsymbol{k}_e = \rho \boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi} \mathrm{div} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}, \qquad \mathrm{curl} \boldsymbol{E} = 0,$$

$$\boldsymbol{k}_m = \frac{1}{c} \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi} \mathrm{curl} \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}, \qquad \mathrm{div} \boldsymbol{H} = 0.$$

(因为这里我们考虑微观场，所以采用对应于真空的方程。)上列方程组也能写成

$$\boldsymbol{k}_e = \frac{1}{4\pi} \{\boldsymbol{E} \mathrm{div} \boldsymbol{E} + \mathrm{curl} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}\},$$

$$\boldsymbol{k}_m = \frac{1}{4\pi} \{\boldsymbol{H} \mathrm{div} \boldsymbol{H} + \mathrm{curl} \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}\}.$$

考虑纯数学的变换

$$\begin{aligned}[\mathrm{curl} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}]_1 &= (\mathrm{curl}_2 \boldsymbol{E}) E_3 - (\mathrm{curl}_3 \boldsymbol{E}) E_2 \\ &= \left(\frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1}\right) E_3 - \left(\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2}\right) E_2 \\ &= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial E_1}{\partial x_k} E_k - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial E_k}{\partial x_1} E_k.\end{aligned}$$

在最后的表达式中加进了其和为零的两个多余的项。对任一指标 i，我们有

$$[\mathrm{curl}\,\mathbf{E}\times\mathbf{E}]_i=\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial E_i}{\partial x_k}-\frac{\partial E_k}{\partial x_i}\right)E_k$$

由此得出

$$4\pi k_{ei}=\sum_k\left\{E_i\left(\frac{\partial E_k}{\partial x_k}\right)+\left(\frac{\partial E_i}{\partial x_k}-\frac{\partial E_k}{\partial x_i}\right)E_k\right\}$$

$$=\sum_k\frac{\partial}{\partial x_k}(E_iE_k)-\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{2}E^2.$$

式中E^2是一个由对称张量缩并而成的标量。利用克朗内克(Kronecker)δ符号

$$\delta_{ik}=\begin{cases}0, & (i\neq k)\\1, & (i=k)\end{cases}\qquad[18.6]$$

(它本身对于正交变换是一个对称张量。)我们能构成如下的张量:

$$4\pi T_{ik}^{(e)}=E_iE_k-\delta_{ik}\frac{1}{2}E^2$$

于是，实际上有

$$4\pi\sum_k\frac{\partial T_{ik}^{(e)}}{\partial x_k}=\sum_k\frac{\partial}{\partial x_k}(E_iE_k)-\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{2}E^2.$$

因此

$$T_{ik}^{(e)}=\frac{1}{4\pi}\left(E_iE_k-\frac{1}{2}\delta_{ik}E^2\right\}$$

和 [18.7]

$$T_{ik}^{(m)}=\frac{1}{4\pi}\left\{H_iH_k-\frac{1}{2}\delta_{ik}H^2\right\}$$

满足[18.4]式。这些是麦克斯韦应力张量。若所有电流和电荷都局限于空间的有限区域内，则场至少象$1/r^2$那样快地趋于零，并且当积分面变为无穷大时，[18.5]式关于

$$\mathbf{T}_n^{(e)}=\frac{1}{4\pi}\left\{\mathbf{E}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})-\mathbf{n}\frac{1}{2}\mathbf{E}^2\right\}$$

和

$$\boldsymbol{T}_n^{(m)}=\frac{1}{4\pi}\left\{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n})-\boldsymbol{n}\frac{1}{2}H^2\right\}$$

的面积分趋于零。

麦克斯韦应力张量是对称的。这意味着合转矩为零（角动量守恒）。

证明：单位体积的转矩为 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{k}$。于是

$$d_{ij}=-d_{ji}=x_i k_j-x_j k_i=\sum_k\left(x_i\frac{\partial T_{jk}}{\partial x_k}-x_j\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}\right)$$

$$=\sum_k\frac{\partial}{\partial x_k}(x_i T_{jk}-x_j T_{ik})-T_{ji}+T_{ij}.$$

且

$$T_{ij}-T_{ji}=d'_{ij},$$

根据高斯定理，得

$$\int\boldsymbol{d}\,\mathrm{d}V=\oint\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{T}_n\,\mathrm{d}f+\int\boldsymbol{d}'\,\mathrm{d}V,$$

第一项等于零；若 $T_{ij}=T_{ji}$，则第二项也等于零。

取任一张量的迹，我们能得到一个标量：

$$T=\sum_i T_{ii}=\text{标量}.$$

（由于 T_{ik} 象 $a_i b_k$ 那样变换，所以 T 象标量 $\sum_i a_i b_i=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 那样变换。）关于麦克斯韦应力张量，则有

$$\sum_i T_{ii}^{(e)}=\frac{1}{4\pi}\left\{E^2-\frac{3}{2}E^2\right\}=-\frac{1}{8\pi}E^2=-W_e;\qquad[18.8]$$

$$\sum_i T_{ii}^{(m)}=-\frac{1}{8\pi}H^2=-W_m,\qquad[18.9]$$

式中 W_e 为电场的能量密度。在下文中我们将会看到，W_m 为磁场

的能量密度。

亥维赛单位在电学中和磁学中是十分相似的：

$$e_H=\sqrt{4\pi}\,e, \qquad E_H=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}E,$$

$$k_e=\rho E=\rho_H E_H, \qquad \mathrm{div}E_H=\rho_H,$$

$$i_H=\sqrt{4\pi}\,i, \qquad H_H=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}H,$$

$$k_m=\frac{1}{c}i\times H=\frac{1}{c}i_H\times H_H, \qquad \mathrm{curl}H_H=\frac{1}{c}i_H,$$

$$W_e=\frac{1}{2}E_H^2, \qquad W_m=\frac{1}{2}H_H^2.$$

英译者注：在有理化米·千克·秒制（参见§13 尾注）中，方程式与上面给出的相差一常数因数。例如，奥斯忒定律（[15.1]式）为

$$\oint H\cdot \mathrm{d}s=J,$$

而毕奥-萨伐尔定律（[15.16]式）为

$$H_P=\frac{1}{4\pi}\int\frac{i_Q\times r_{PQ}}{r_{PQ}^3}\mathrm{d}V_Q, \quad 式中\ r_{PQ}=x_P-x_Q.$$

电流的单位为安培，而 H 的单位为安培·匝/米。磁感应强度 B 和磁场强度 H 由可写成不同形式的一个本构方程相联系：

$$B=\mu H=\varkappa_m\mu_0 H=\mu_0(1+\chi_m)H=\mu_0 H+M.$$

式中 $\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ 千克·米·库仑$^{-2}$ 为真空的磁导率，μ 为媒质的磁导率（单位为千克·米·库仑$^{-2}$），$\varkappa_m=\mu/\mu_0$ 为相对磁导率（无量纲），$\chi_m=\varkappa_m-1$ 为磁化率（无量纲），以及 M 为磁化强度。B 和 M 的单位都是韦伯/米^2，而 1 韦伯=1 千克·米^2/库仑·秒。

在有理化米·千克·秒制中，下列各方程成立

电学	磁学
$k_e=\rho E,$	$k_m=i\times H,$
$\mathrm{div}E=\rho,$	$\mathrm{curl}H=i,$
$W_e=\frac{1}{2}\varepsilon E^2,$	$W_m=\frac{1}{2}\mu H^2.$

第三章　准静态(电磁)场

假定本章所要研究的电磁场是这样的：在光通过所研究的物体的最大线度这样一段距离所需的时间内，它变化极微。如此，则不需考虑场传播的有限速度。

§ 19. 法拉第电磁感应定律

对于准静态场，前述诸方程必须附加的重要定律是**法拉第电磁感应定律**。当不存在可磁化的物质时，该定律的最普遍形式为

$$\oint_C E_s \mathrm{d}s = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_F H_n \mathrm{d}f. \qquad [19.1]$$

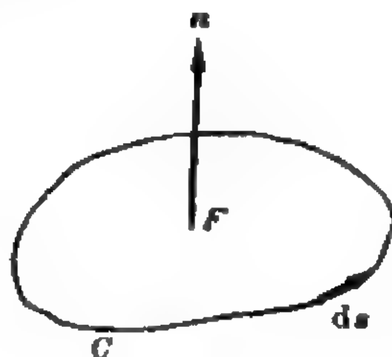


图 19.1

同静态和稳恒态的情况相反，这里电场强度沿闭合路径的线积分不再等于零。[19.1]式中的负号能用能量的观点来说明：接通电流需要耗费功(参见 § 20)。

可将[19.1]式变换为

$$\int_F \mathrm{curl}_n E \mathrm{d}f = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_F H_n \mathrm{d}f = -\frac{1}{c}\int_F \frac{\partial H_n}{\partial t}\mathrm{d}f.$$

由于此式对任意曲面都成立，故必定有

$$\mathrm{curl} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}. \qquad [19.2]$$

这是法拉第电磁感应定律的微分形式。

在**可磁化的物质**中，应该用 B 来代替 H：

$$\oint_C E_s \mathrm{d}s = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int B_n \mathrm{d}f, \qquad [19.3]$$

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}. \qquad [19.4]$$

由[19.4]式得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0,$$

此式符合先前较严谨的假设[12.3]式

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0, \qquad [19.5]$$

或，在真空中有

$$\mathrm{div}\boldsymbol{H} = 0. \qquad [19.6]$$

若在任一给定时刻[19.5]或[19.6]式成立，则由法拉第电磁感应定律推知，在所有时刻都成立。

此外，[3.4]和[16.12]两式成立。因此

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho \qquad [19.7]$$

和

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i}, \qquad [19.8]$$

或，在真空中有

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i}. \qquad [19.9]$$

最后两方程是近似的，这是由于：由它们将得出 $\mathrm{div}\boldsymbol{i}=0$，然而，这一条件并不严格满足。本节中的所有其它方程都是严格成立的。

§ 20. 电流系的能量

现在我们能够计算电流系的能量，这能量等于断开外加电压后感生电流所作的功。因为单位体积的力由[17.5]式给出，所以单位时间电流系单位体积所作的功为

$$A = \boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{k}_e + \boldsymbol{k}_m) = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{E} + 0. \qquad [20.1]$$

假定，外电场在 $t=0$ 时断开，那么，利用[19.9]式，感生电场随后所作的功为

$$W = \int \mathrm{d}t \int A\mathrm{d}V = \int_0^\infty \mathrm{d}t \int \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V = \frac{c}{4\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}t \int \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{curl}\boldsymbol{H}\mathrm{d}V.$$

因为

$$\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{curl}\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{curl}\boldsymbol{E} = -\mathrm{div}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$$

以及[19.2]式，所以我们有

$$W = \frac{c}{4\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}t \int \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{curl}\boldsymbol{E}\mathrm{d}V = -\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}t \int \boldsymbol{H}\cdot\dot{\boldsymbol{H}}\mathrm{d}V$$

$$= -\frac{1}{8\pi}\int H^2\mathrm{d}V\Big|_{t=0}^{t=\infty}.$$

（在准静态情况中，由于在无穷远处场足够快地趋于零，所以，面积分可以略去。）于是，因为 $t=\infty$ 时 $H=0$，所以我们得到

$$W = \frac{1}{8\pi}\int H^2\mathrm{d}V. \qquad [20.2]$$

这就是电流系的能量。它也等于接通电流时所需作的功。由于法拉第定律[19.1]式中的负号，所以这里能量是正的。

因为 $\mathrm{div}\dot{\boldsymbol{H}}=0$，所以下式仍然严格地成立：

$$\boldsymbol{H} = \mathrm{curl}\boldsymbol{A}. \qquad [20.3]$$

反之，由[19.9]式得到

$$\mathrm{div}\boldsymbol{i} = 0, \qquad [20.4]$$

并且，如§15中已证明的，

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\boldsymbol{i}\mathrm{d}V}{r} \qquad [20.5]$$

和

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = 0. \qquad [20.6]$$

最后的三个方程仅仅是缓慢变化的场的近似方程。由[20.2]式给

出的能量W可变换为

$$W=\frac{1}{8\pi}\int H^2\mathrm{d}V=\frac{1}{8\pi}\int \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{curl}\boldsymbol{A}\mathrm{d}V.$$

对上式作分部积分，略去其中的面积分，并考虑到[19.9]式，则得到

$$W=\frac{1}{8\pi}\int \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{curl}\boldsymbol{H}\mathrm{d}V=\frac{1}{2c}\int \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}\mathrm{d}V.$$

再利用[20.5]式，则有

$$W=\frac{1}{2c^2}\iint\frac{\boldsymbol{i}_P\cdot\boldsymbol{i}_{P'}}{r_{PP'}}\mathrm{d}V_P\mathrm{d}V_{P'}. \qquad [20.7]$$

[20.7]式显示出与电场能[4.5]式有一定的类似性。对一些个别的电路，[20.7]式能写成如下形式：

a. **单个电路**。这里

$$W=\frac{1}{2}LJ^2. \qquad [20.8]$$

式中量L称为自感系数，它是这样定义的，使得

$$LJ^2=\frac{1}{c^2}\iint\frac{\boldsymbol{i}_P\cdot\boldsymbol{i}_{P'}}{r_{PP'}}\mathrm{d}V_P\mathrm{d}V_{P'}. \qquad [20.9]$$

由于L只取决于电路的几何形状，所以这样定义是合理的。即，若电流强度J乘以某一因数，则每点的电流密度$\boldsymbol{i}$也乘以同样的因数。这里只需预先假定：被积函数中只能使用稳恒电流分布。对于迅变场，L是与频率相关的。

b. **双电路**。在这种情况中，磁场能取正定二次型

$$W=\frac{1}{2}L_1J_1^2+L_{12}J_1J_2+\frac{1}{2}L_2J_2^2, \qquad [20.10]$$

式中

$$L_{12}J_1J_2=\frac{1}{c^2}\int_1\mathrm{d}V_P\int_2\mathrm{d}V_{P'}\frac{\boldsymbol{i}_P\cdot\boldsymbol{i}_{P'}}{r_{PP'}}. \qquad [20.11]$$

若导体是丝状的，则有

$$L_{12}J_1J_2=J_1J_2\frac{1}{c^2}\oint_1\oint_2\frac{\mathrm{d}\mathbf{s}_1\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}_2}{r_{12}}. \qquad [20.12]$$

由于 $r_{PP'}$ 保持有限，这种过渡是容许的。于是，互感系数为

$$L_{12}=L_{21}=\frac{1}{c^2}\oint_1\oint_2\frac{\mathrm{d}\mathbf{s}_1\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}_2}{r_{12}}. \qquad [20.13]$$

反之，对于自感的情况，不能实施从空间导体到丝状导体的过渡；否则可能导致完全错误的结果。

对于两个以上电路的推广是显然的。

螺线管的自感系数。根据[15.5]式，

$$H=\frac{4\pi N}{h}\frac{J}{c}.$$

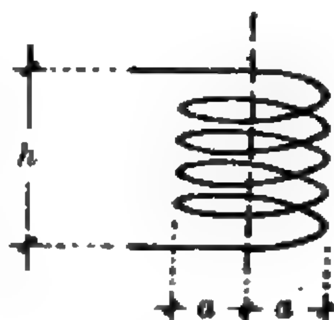


图 20.1

于是有

$$\frac{1}{2}LJ^2=\frac{1}{8\pi}\int H^2\mathrm{d}V=\frac{1}{8\pi}\pi a^2h\frac{16\pi^2N^2}{h^2}\frac{J^2}{c^2},$$

$$L=\frac{1}{c^2}\frac{4\pi^2a^2N^2}{h}=\frac{1}{c^2}\frac{(2\pi aN)^2}{h}=\frac{1}{c^2}\frac{\Lambda^2}{h}, \qquad [20.14]$$

式中 $\Lambda=2\pi aN$ 为导线的总长度(参见图 20.1)。

自感系数的量纲。在厘米·克·秒单位中，

$$L_{\mathrm{emu}}=c^2L_{\mathrm{esu}}, \qquad [L_{\mathrm{emu}}]=\text{厘米}.$$

在伏特-安培(有理化米·千克·秒)制中，

$$1\ \text{亨利}=1\ \frac{\text{伏特}\cdot\text{秒}}{\text{安培}}=10^9\mathrm{emu}.$$

§ 21. 电路中的非稳恒电流

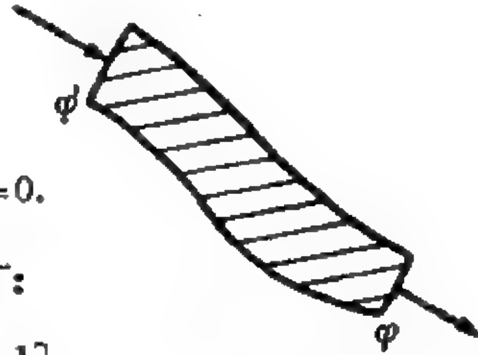


图 21.1

由[19.2]和[20.3]式可得

$$\operatorname{curl}\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=0.$$

于是，有静电关系[2.3]式的如下推广：

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}-\operatorname{grad}\varphi. \qquad [21.1]$$

现在我们要提出关于电路中电流变化的一个重要关系式。设电流的空间分布为已知。我们假设它与稳恒电流的情况相同。首先考察一个具有两个电极的一般导体。如 § 14 中所表明的，

$$\boldsymbol{i}=\sigma\boldsymbol{E}, \qquad [21.2]$$

而单位时间内产生的热量，一方面根据电阻 R 的定义由下式给出

$$\bar{Q}=\int\frac{\boldsymbol{i}^2}{\sigma}\mathrm{d}V=J^2R, \qquad [21.3]$$

另一方面，由[21.1]式有

$$\bar{Q}=\int\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V=-\int\boldsymbol{i}\cdot\operatorname{grad}\varphi\mathrm{d}V-\frac{1}{c}\int\boldsymbol{i}\cdot\dot{\boldsymbol{A}}\mathrm{d}V.$$

若在

$$\operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{i})=\varphi\operatorname{div}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}\cdot\operatorname{grad}\varphi$$

中略去 $\operatorname{div}\boldsymbol{i}$，并用[20.5]式的 $\boldsymbol{A}$ 代入前式，则得

$$\bar{Q}=-\oint\varphi i_n\mathrm{d}f-\frac{1}{c^2}\iint\frac{\boldsymbol{i}_P\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{i}_{P'}}{\partial t}}{r_{PP'}}\mathrm{d}V_P\mathrm{d}V_{P'}.$$

求[20.9]式对时间的导数，有

$$2LJ\dot{J}=2\frac{1}{c^2}\iint\frac{\boldsymbol{i}_P\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{i}_{P'}}{\partial t}}{r_{PP'}}\mathrm{d}V_P\mathrm{d}V_{P'}$$

(因交换 P 和 P' 并不影响积分)。于是得到

$$\bar{Q}=J^2R=-\oint\varphi i_n\mathrm{d}f-LJ\dot{J},\qquad J^2R=eJ-LJ\dot{J},$$

式中

$$e=\varphi'-\varphi$$

为电动势。于是，我们得到重要的方程

$$L\dot{J}+RJ=e. \tag{21.4}$$

若设导体是丝状的，我们会更容易地获得这个关系。但这种方法并不正确。

对于包含电容器的电路，我们得到一个附加项

$$-\oint\varphi i_n\mathrm{d}f=eJ-(\varphi_{1'}-\varphi_{2'})J.$$

在极板 1′ 和 2′(参见图 21.2)上的电荷之和保持恒定并等于零，电荷由左端流入，而从右端流出；仿佛电流不间断地流过。令电荷的电量为 e，电容器的电容为 C，则

$$\varphi_{1'}-\varphi_{2'}=\frac{e}{C}.$$

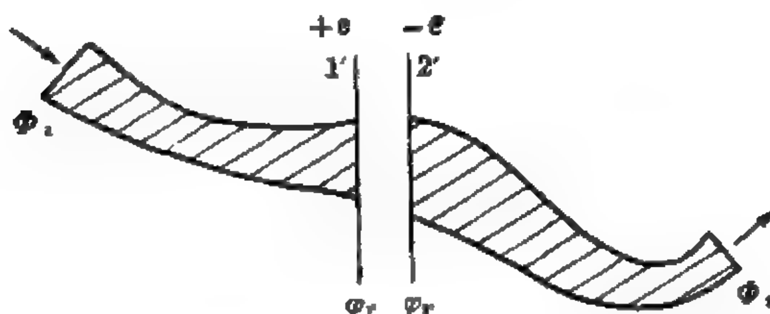


图 21.2

另一方面，有

$$\dot{e}=J.$$

在此情况中，微分方程变为

$$L\dot{J}+WJ+\frac{e}{C}=e, \tag{21.5}$$

或者，对它微分，得

$$L\ddot{J}+W\dot{J}+\frac{J}{C}=\dot{e}. \qquad [21.6]$$

在双电路的情况中，Q 是对每一电路分别计算的。而 $\boldsymbol{A}$ 却是由两个电路共同产生的。因此，

$$\bar{Q}_1=\int_1 \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V=J_1^2R_1=-\oint_1\varphi i_n\mathrm{d}f-\frac{1}{c}\int_1\boldsymbol{i}\cdot\dot{\boldsymbol{A}}\mathrm{d}V,$$

$$\boldsymbol{A}_P=\frac{1}{c}\int_1\frac{\boldsymbol{i}_{P'}}{r_{PP'}}\mathrm{d}V_{P'}+\frac{1}{c}\int_2\frac{\boldsymbol{i}_{P'}}{r_{PP'}}\mathrm{d}V_{P'}.$$

同前面的计算完全类似，可得到

$$\begin{aligned}&L_1\dot{J}_1+L_{12}\dot{J}_2+R_1J_1+\frac{e_1}{C_1}=e_1,\\&L_2\dot{J}_2+L_{12}\dot{J}_1+R_2J_2+\frac{e_2}{C_2}=e_2.\end{aligned} \qquad [21.7]$$

若电路中不存在电容器，则 e_i/C_i 项消失。能量为

$$E=\frac{1}{2}L_1J_1^2+L_{12}J_1J_2+\frac{1}{2}L_2J_2^2+\frac{1}{2}\frac{e_1^2}{C_1}+\frac{1}{2}\frac{e_2^2}{C_2}. \qquad [21.8]$$

因为

$$J_1=\dot{e}_1, \qquad J_2=\dot{e}_2,$$

所以有

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=e_1J_1+e_2J_2-R_1J_1^2-R_2J_2^2, \qquad [21.9]$$

上式等于外力所作的功减去单位时间内产生的热量。由于，若以 $-J$ 代替 J，以 $-t$ 代替 t，该方程不是不变的，所以其中的 R 具有摩擦力的特性。

因为我们曾假设空间电流的分布为已知，并且也略去了辐射效应，所以我们得到的是常微分方程，而不是偏微分方程。

某些典型微分方程的积分

1. 无电容的单个电路(*RL* 电路)。其微分方程为

$$L\dot{J}+RJ=\varepsilon. \qquad [21.10]$$

断开电源,

$$\begin{cases}\varepsilon=\varepsilon_0 & (t<0\text{时}),\\ \varepsilon=0 & (t>0\text{时}),\end{cases}$$

对应的解为

$$J=J_0=\frac{\varepsilon_0}{R} \qquad (t<0) \qquad (\text{欧姆定律}),$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{J}&=-\frac{R}{L}J,\\ J&=J_0e^{-\frac{R}{L}t},\end{aligned}\right\} \quad (t>0)$$

(积分常数已按 $t=0$ 时电流应连续的条件选定。)这个解对应于电流逐渐衰减。

接通电源,

$$\begin{cases}\varepsilon=0 & (t<0),\\ \varepsilon=\varepsilon_0 & (t>0),\end{cases}$$

其解为

$$J=0 \qquad (t<0),$$

$$\dot{J}+\frac{R}{L}\left(J-\frac{\varepsilon_0}{R}\right)=0 \qquad (t>0),$$

$$J-\frac{\varepsilon_0}{R}=C\cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

由于 J 在 $t=0$ 时是连续的,所以有

$$C=-\frac{\varepsilon_0}{R},$$

$$J=\frac{\varepsilon_0}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

因此,当 $t\to\infty$ 时,$J\to\varepsilon_0/R$。起初,由于自感电流逐渐增大;在数

量级为 L/R(正比于 $1/R$)的时间内升到其最后的电流值。

2. 加上随时间周期变化的电动势

线性表达式便于用复指数表示。其后,视需要,可取其实(或虚)部。即,求得实系数线性微分方程的复数解后,则其实部和虚部都是该方程的解。

因此设

$$e=e_0e^{i\omega t},$$

式中 ω 为角频率,等于频率的 2π 倍,并试以

$$J=Ae^{i\omega t}$$

作为解。对于这种型式的解,微分算符相当于某种乘数:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sim i\omega,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\sim(i\omega)^2=-\omega^2.$$

于是[21.10]式给出

$$(Li\omega+R)A=e_0,$$

$$A=\frac{\varepsilon_0}{R+i\omega L}=\frac{\varepsilon_0(R-i\omega L)}{R^2+\omega^2L^2}.$$

若 $e_0=|e_0|e^{i\alpha}$,则也能写成

$$A=|A|e^{i(\alpha+\theta)}.$$

式中

$$|A|=|\varepsilon_0|/(R^2+\omega^2L^2)^{1/2}\quad 和\quad \operatorname{tg}\theta=-\omega L/R.$$

因为

$$\mathrm{Re}(\varepsilon)=|e_0|\cos(\omega t+\alpha)$$

和

$$\mathrm{Re}(J)=|A|\cos(\omega t+\alpha+\theta),$$

所以,电流相对于外加电动势有 θ 角的相移。

3. **有电容的电路(RLC 电路)。**其微分方程为

$$L\ddot{J}+R\dot{J}+\frac{1}{C}J=\dot{\varepsilon}. \qquad [21.11]$$

a. 受迫振荡: $\varepsilon=\varepsilon_0 e^{i\omega t}$。设 $\alpha=0$, 且 ε_0 为正实数。并试以

$$J=Ae^{i\omega t}$$

为解。于是,[21.11]式给出

$$\left(-\omega^2 L+i\omega R+\frac{1}{C}\right)A=\varepsilon_0 i\omega,$$

$$A=\frac{i\omega\varepsilon_0}{-\omega^2 L+i\omega R+1/C}=|A|e^{i\theta},$$

式中

$$|A|=\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2+(\omega L-1/C\omega)^2}}, \qquad \mathrm{tg}\,\theta=-\frac{1}{R}\left(\omega L-\frac{1}{C\omega}\right).$$

当分母极小时,$|A|$达到最大值:

$$\omega_m L-\frac{1}{C\omega_m}=0,$$

$$\left.\begin{aligned}\omega_m&=\frac{1}{\sqrt{LC}}\\ |A|_{\max}&=\frac{\varepsilon_0}{R}\end{aligned}\right\}\text{共振情况。}$$

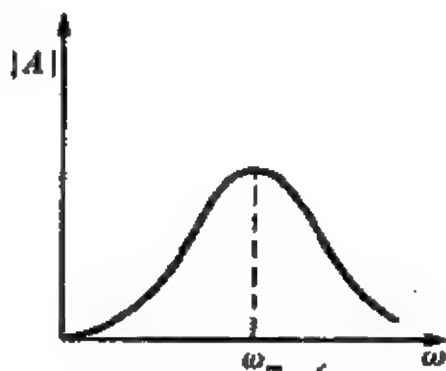


图 21.3

$\mathrm{tg}\,\theta$ 在共振点处变号。

b. 自由振荡: $\varepsilon=0$。试以

$$J=Ae^{i\omega_0 t}$$

为解。此时振荡频率 ω_0 不是由电动势给定,而是由微分方程[21.11]所确定:

$$-L\omega_0^2+Ri\omega_0+\frac{1}{C}=0, \qquad \omega_0=\frac{iR}{2L}\pm\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}.$$

存在两种可能性①:

$$(\alpha)\qquad \frac{R^2}{4L^2}<\frac{1}{LC},\qquad R<2\sqrt{\frac{L}{C}};$$

$$\mathrm{Re}(J)=Ae^{-\frac{R}{2L}t}\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\right)t$$

(已适当选择时间 t 的原点)。这对应于**阻尼振荡**。

$$(\beta)\qquad \frac{R^2}{4L^2}>\frac{1}{LC},\qquad R>2\sqrt{\frac{L}{C}};$$

$$\omega_0=i\left(\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}\right),$$

$$\mathrm{Re}(J)=A\cdot e^{-\left(\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}\right)t}.$$

这里,有两个解,它们对应于平方根的两种符号。这是**非周期(过阻尼)**的情况。

在周期情况(α)中,振荡频率 ω_0 比共振频率 ω_m 小些。

$$若\ R\ll 2\sqrt{\frac{L}{C}},\ 则$$

$$\omega_0\to\omega_m=1/\sqrt{LC},$$

此式有时叫做汤姆孙方程。

4. 两个 RLC 电路的并联。若略去电路1和2间的相互作用,并求[21.7]式对时间的微分,则得

$$\dot{\varepsilon}=L_1\ddot{J}_1+R_1\dot{J}_1+\frac{J_1}{C_1}=L_2\ddot{J}_2+R_2\dot{J}_2+\frac{J_2}{C_2}.$$

---

① 英译者注:除所讨论的阻尼和过阻尼两种情况(α)和(β)外,还存在第三种可能性,即,当 $R^2/4L^2=1/LC$ 时的情况。此时,

$$\omega_0=iR/2L=i/\sqrt{LC}$$

和

$$\mathrm{Re}(J)=Ae^{-(R/2L)t}=Ae^{-t/\sqrt{LC}}=Ae^{-\omega_m t},$$

这叫做**临界阻尼**的情况。

仿照强迫振荡，我们令

$$J_1=A_1e^{i\omega t},$$
$$J_2=A_2e^{i\omega t},$$
$$e=\varepsilon_0e^{i\omega t}.$$

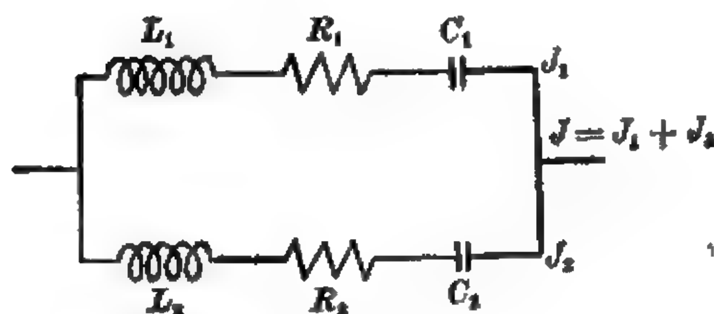


图 21.4

于是有

$$i\omega\varepsilon_0=A_1\left(-L_1\omega^2+R_1i\omega+\frac{1}{C_1}\right)=A_2\left(-L_2\omega^2-R_2i\omega+\frac{1}{C_2}\right),$$

$$A_1+A_2=i\omega\varepsilon_0\left\{\frac{1}{-L_1\omega^2+R_1i\omega+1/C_1}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{-L_2\omega^2+R_2i\omega+1/C_2}\right\},$$

$$J=i\omega\varepsilon\left\{\frac{1}{-L_1\omega^2+R_1i\omega+1/C_1}+\frac{1}{-L_2\omega^2+R_2i\omega+1/C_2}\right\}.$$

对于无电容的直流情况，则有

$$J=\varepsilon\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right).$$

§ 22. 趋肤效应

迄今，我们都是假定电流的空间分布与直流电的情况相同。但是，对于较高的频率，由于自感现象，电流总是倾向于被局限在导体的表面。因此，由于有效截面的减小，电阻增大。

我们对半侧无穷大导体进行计算。(对柱形导体将出现贝塞耳函数。)令电流分布平行于 y 轴。(对于直流电流，分布是均匀的)。利用下面这些方程:

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{H}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i}, \qquad [22.1]$$

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{H}}, \qquad [22.2]$$

$$\boldsymbol{i}=\sigma\boldsymbol{E}, \qquad [22.3]$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{H}=0. \qquad [22.4]$$

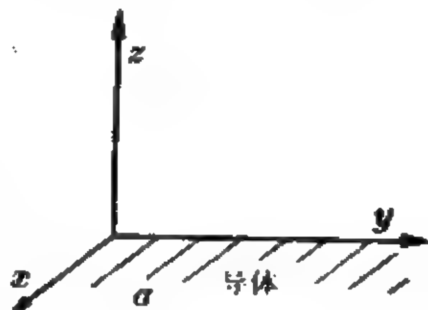


图 22.1

由于[22.3]和[20.4]两式，下式也成立

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E}=0. \qquad [22.5]$$

由前三个方程得出

$$\mathrm{curl\ curl}\boldsymbol{E}=-\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial t}=-\frac{4\pi}{c^2}\sigma\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t},$$

$$\mathrm{curl\ curl}\boldsymbol{H}=-\frac{4\pi}{c^2}\sigma\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}.$$

根据恒等式[15.9]，并考虑到[22.5]和[19.6]式，导致

$$\nabla^2\boldsymbol{E}=\frac{4\pi}{c^2}\sigma\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t},$$
$$\nabla^2\boldsymbol{H}=\frac{4\pi}{c^2}\sigma\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}. \qquad [22.6]$$

这两个方程与热传导方程极为相似。由于曾作了通常的准静态场近似，因此它们是不精确的。然而，它们对于阐明趋肤效应是足够的。我们假定场具有 $E_y(z)$，$H_x(z)$ 的形式，其它分量都为零。这一假设已够用。令电场是时间的周期函数:

$$E_y=E_y^0(z)e^{i\omega t}.$$

代入[22.6]式中，则有

$$\frac{\mathrm{d}^2E_y^0}{\mathrm{d}z^2}=\frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}iE_y^0.$$

令 $k^2=4\pi\sigma\omega i/c^2$，则其解为

$$E_y^0=Ae^{kz}.$$

再引入量 $\varkappa=\sqrt{2\pi\sigma\omega}/c$，即

$$k^2=\varkappa^2 2i,\quad k=\pm\varkappa(1+i), \tag{22.7}$$

则解变为

$$E_y=Ae^{\varkappa z}e^{i(\varkappa z+\omega t)}$$

或

$$\mathrm{Re}E_y=Ae^{\varkappa z}\cos(\omega t+\varkappa z). \tag{22.8}$$

因为 E_y 不可能随着深度的增加而增大，所以我们必须限定 k 取正值。因此，随着 $z\to-\infty$，E_y 指数地减小。（对于 $\omega=k=0$ 的情况，我们最多得到 E_y 与 z 是线性相关的。）

由于

$$\frac{\sigma}{c^2}=\sigma_{\mathrm{emu}},$$

因此交流电流渗入的有效深度 $1/\varkappa$ 为

$$\frac{1}{\varkappa}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\mathrm{emu}}\omega}}. \tag{22.9}$$

数值估计。若频率 $\nu=\omega/2\pi=50$ 秒$^{-1}$，对于铜 $\sigma_{\mathrm{emu}}=5.9\times10^{-4}$ 秒·厘米$^{-2}$，于是

$$1/\varkappa\sim1\text{ 厘米}.$$

对于柱形导线的电阻，计算给出渐近公式（$\varkappa a\gg1$）

$$R=R_0\frac{\varkappa a}{2}.$$

式中，R_0 为直流电阻，a 为导线的半径。

§ 23. 运动导体的电磁感应定律

下面的考虑阐述了相对论的初步。

令导体以速度 v 运动。按照[17.6]式，作用在运动电荷 e 上

的力不是 $e\boldsymbol{E}$，而是

$$e\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}\right).$$

对于运动导体，欧姆定律必须加以修正，即，以

$$\boldsymbol{E}^*=\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}) \qquad [23.1]$$

代替 $\boldsymbol{E}$，所以电流密度由下式给出

$$\boldsymbol{i}=\sigma\boldsymbol{E}^* \qquad [23.2]$$

(上式只准确至 v/c 的第一级，严格的考虑表明，σ 与方向有关。)

现在，不附加其它物理假设，能够纯数学地证明：若

$$\oint E_s\mathrm{d}s=-\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int H_n\mathrm{d}f \qquad [23.3]$$

对静止曲面成立，则

$$\oint_{\rightarrow} E_s^*\mathrm{d}s=-\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\rightarrow} H_n\mathrm{d}f \qquad [23.4]$$

对运动曲面成立。(符号→代表曲面及其边界曲线是运动的。)

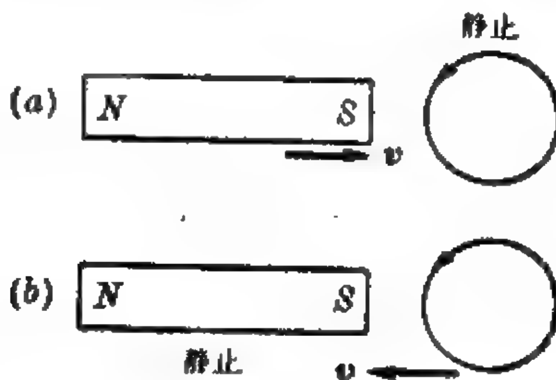


图 23.1

上述结果同物理定律[23.2]式合在一起，表明：不论(a)磁体相对静止导体缓慢运动(图 23.1a)，或是(b)导体以大小相等、方向相反的速度相对静止磁体运动(图 23.1b)，由于 $\oint \boldsymbol{E}_s^*\mathrm{d}s$ 在两种

情况中是相同的。因此，导体和磁体间相同的相对运动感应出相同的电流。在相对论中，这一事实将被更进一步地推广。

数学定理[23.4]式的证明。对于在 t_0 时刻的任一矢量 $\boldsymbol{B}$，下式成立：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\rightarrow} B_n \mathrm{d}f = \int \frac{\partial B_n}{\partial t} \mathrm{d}f + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{t} B_n(t_0)\mathrm{d}f. \qquad [23.5]$$

我们在 t 和 $t+\mathrm{d}t$ 时刻的两个曲面上再增补一个由导体在 $\mathrm{d}t$ 时间所扫过的柱面，从而构成一个闭合曲面(参见图 23.2)。在此柱面上有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f} = \mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{v}\mathrm{d}t.$$

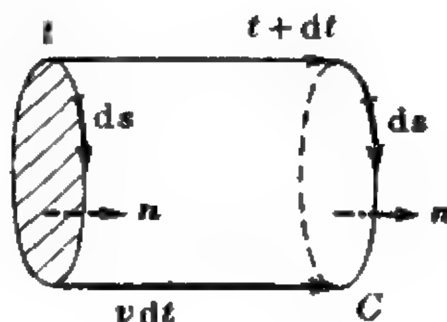


图 23.2

对闭合曲面应用高斯定理，给出

$$\int \mathrm{div}\boldsymbol{B}\mathrm{d}V = \int_{t+\mathrm{d}t} B_n(t)\mathrm{d}f - \int_{t} B_n(t)\mathrm{d}f + \int_{C} \boldsymbol{B}\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{v}\mathrm{d}t),$$

式中，$\boldsymbol{B}$ 的自变数取固定时刻 t 的值。利用斯托克斯定理变换最后一个积分，并因 $\mathrm{d}V = \mathrm{d}f v_n \mathrm{d}t$，故得到

$$\int_{t+\mathrm{d}t} B_n(t)\mathrm{d}f - \int_{t} B_n(t)\mathrm{d}f = \int \mathrm{div}\boldsymbol{B}\mathrm{d}V - \mathrm{d}t\int_{C} \mathrm{d}\boldsymbol{s}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$$

$$= \mathrm{d}t\int \{\boldsymbol{v}\,\mathrm{div}\boldsymbol{B} - \mathrm{curl}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\}_n \mathrm{d}f$$

将此式代入[23.5]式中，给出数学恒等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\rightarrow} B_n \mathrm{d}f = \int \left\{\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\,\mathrm{div}\boldsymbol{B} - \mathrm{curl}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\right\}_n \mathrm{d}f. \qquad [23.6]$$

这一关系式对任一可微矢量$\boldsymbol{B}$都成立。

将上式应用在 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H}$ 的情况。重要的是用到如下的事实

$$\mathrm{div}\boldsymbol{H} = 0.$$

于是，有

$$-\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\rightarrow} H_n \mathrm{d}f = -\frac{1}{c}\int\left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\right)_n \mathrm{d}f + \frac{1}{c}\int(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H})_s \mathrm{d}s,$$

根据[19. 2]式和斯托克斯定理，上式变为

$$-\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\rightarrow} H_n \mathrm{d}f = \oint\left\{\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}\right\}_s \mathrm{d}s$$

$$= \oint E_s^* \mathrm{d}s.$$

于是，定理[23. 4]得证。

第四章　迅变(电磁)场

§ 24. 麦克斯韦方程组

已用于准静态场中的方程组包含一个矛盾。真空中的方程组为

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{H}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i},\qquad \mathrm{div}\boldsymbol{H}=0,$$

$$\mathrm{curl}\,\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t},\qquad \mathrm{div}\boldsymbol{E}=4\pi\rho.$$

由此，得到

$$\mathrm{div}\boldsymbol{i}=0.$$

然而，这不完全正确，因为，一般说来还有连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\boldsymbol{i}=0.$$

(总可以认为面电荷密度是体电荷密度的极限情况。) 这种状况通过增添一附加项不难得到纠正。从第四方程和连续性方程得

$$\mathrm{div}\left\{\boldsymbol{i}+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right\}=0.$$

因为 $\mathrm{div}\ \mathrm{curl}\boldsymbol{H}\equiv 0$，若用 $\boldsymbol{i}+(1/4\pi)(\partial \boldsymbol{E}/\partial t)$ 代替 $\boldsymbol{i}$，则方程组便没有矛盾了。这样，

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{H}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i}+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}.$$

这个附加项 $(1/c)(\partial \boldsymbol{E}/\partial t)$ 是由麦克斯韦引进的，叫做**位移电流**。对稳恒态场，这项不存在。现在我们得到下列完全自洽的方程组：

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{H}},\qquad [24.1]$$

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{H}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i}+\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{E}}, \qquad [24.2]$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{H}=0, \qquad [24.3]$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E}=4\pi\rho. \qquad [24.4]$$

这些就是著名的真空中的麦克斯韦方程组。

因为从[24.2]和[24.4]式得

$$\dot{\rho}+\mathrm{div}\boldsymbol{i}=0, \qquad [24.5]$$

所以，连续性方程现在表现为麦克斯韦方程组的一个结果。对面电荷密度有颇类似的结果。根据[7.3]式，

$$4\pi\omega=E_{n_1}+E_{n_2}.$$

电荷守恒定律要求

$$\dot{\omega}+i_{n_1}+i_{n_2}=0①.$$

由这两个方程，得

$$4\pi(i_{n_1}+i_{n_2})+\dot{E}_{n_1}+\dot{E}_{n_2}=0.$$



图 24.1

即，通过界面 $4\pi\boldsymbol{i}+\dot{\boldsymbol{E}}$ 的法向分量是连续的。

分子观点。上述方程组对真空中的场强是正确的。因此，它们对微观场 $\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 也适用。取 $\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 的空间平均值便得到宏观场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$，

$$\bar{\boldsymbol{e}}=\boldsymbol{E}, \qquad \bar{\boldsymbol{h}}=\boldsymbol{B},$$

对于宏观场，下列方程组成立：

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{B}}, \qquad [24.1']$$

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{B}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i}+\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{E}}, \qquad [24.2']$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B}=0, \qquad [24.3']$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E}=4\pi\rho. \qquad [24.4']$$

① 英译本有误，已改正。——中译者注

这就是有质媒质的麦克斯韦方程组。在这方程组中，ρ 表示总电荷密度(包括极化电荷)而 $\boldsymbol{i}$ 是总电流密度，

$$\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}_c+c\,\mathrm{curl}\boldsymbol{M}+\dot{\boldsymbol{P}},\qquad [24.6]$$

式中 $\boldsymbol{i}_c$ 是传导电流密度，$c\,\mathrm{curl}\boldsymbol{M}$ 是分子电流密度，而 $\dot{\boldsymbol{P}}$ 是极化电流密度。由于极化度 $\boldsymbol{P}$ 等于单位体积中电偶极矩，

$$\boldsymbol{P}=(\Sigma e\boldsymbol{x})_{\text{单位体积}},$$

则

$$\dot{\boldsymbol{P}}=(\Sigma e\boldsymbol{v})_{\text{单位体积}}$$

的确是由偶极矩的变化所产生的电流密度。

若考虑到如§7和§8所示的 $\rho=\rho_f-\mathrm{div}\boldsymbol{P}$，麦克斯韦方程组[24.2′]和[24.4′]能用$\boldsymbol{D}$和$\boldsymbol{H}$改写成

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{H}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i}_c+\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{D}},\qquad [24.2'']$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D}=4\pi\rho_f,\qquad [24.4'']$$

式中$\boldsymbol{D}$和$\boldsymbol{H}$分别定义为

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{E}+4\pi\boldsymbol{P},\qquad [24.7]$$

和

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}-4\pi\boldsymbol{M}.\qquad [24.8]$$

正如从[24.2]和[24.4]式得到[24.5]式那样，从[24.2″]和[24.4″]式可得到自由电荷的连续性方程

$$\dot{\rho}_f+\mathrm{div}\boldsymbol{i}_c=0,\qquad [24.5']$$

除上述方程组外还必须附加唯象的(半经验的)本构方程：

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E},\qquad [24.9]$$

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H},\qquad [24.10]$$

$$\boldsymbol{i}_c=\sigma\boldsymbol{E}.\qquad [24.11]$$

然而，ε，μ 和 σ 实际上不是常数；其量值对于缓变场和迅变场是不

同的。对于周期场

$$F=F_0(x)e^{i\omega t},$$

(其中 F 代表 D, E, B, H 或 i 中的任一个量); 它们是频率的函数

$$\varepsilon(\omega),\ \ \mu(\omega),\ \ \sigma(\omega).$$

在 $\omega\to 0$ 的极限情况中, 它们过渡到静态场的 ε, μ, 和 σ。这种频率关系在理论上只能借助于对媒质的特殊模拟来确定。最终的分析必然要引进量子论, 因为要牵涉到原子结构问题。对于任意(非周期的)场, ε, μ, 和 σ 甚至不是数值而是算符。唯象本构方程组[24.9], [24.10]和[24.11]不如其它方程组那样普适。

连续性方程[24.5′] 和唯象本构方程 [24.9]和 [24.11]的推论是

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{i}_c=\sigma\,\mathrm{div}\boldsymbol{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon}\mathrm{div}\boldsymbol{D}=\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\rho_f,$$

$$\dot{\rho}_f+\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\rho_f=0.$$

作积分, 得

$$\rho_f=\rho_f^0 e^{-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}t}.$$

即, 导体内的自由电荷密度要经过有限时间才消失。这时间叫做**弛豫时间**。

§ 25. 真空中的电磁波

电磁波的存在是麦克斯韦方程组的一个重要结果。在真空中,

$$\boldsymbol{i}_c=0,\qquad \rho_f=0.$$

从[24.1]式取散度, 得

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\boldsymbol{H}=0.$$

所以,[24.3]式并不是与[24.1]式无关的，但它能多作出一些推断。对周期场来说，的确,[24.3]式甚至是[24.1]式的一个推论。类似地,注意到 $\mathbf{i}=0$, 由[24.2]式,得出

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\boldsymbol{E}=0,$$

对周期场,甚至得到

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E}=0, \qquad [25.1]$$

当 $\rho=0$ 时,后者是从[24.4]式得到的普遍结果。

由[24.2]式的附加项 $\dot{\boldsymbol{E}}/c$ 推断：可能存在电磁波。即，从[24.1]式和

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{H}=\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{E}} \qquad [25.2]$$

消去 $\boldsymbol{H}$,由此构成

$$\mathrm{curl\,curl}\boldsymbol{E}=\mathrm{grad\,div}\boldsymbol{E}-\nabla^2\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{E}},$$

并因[25.1]式,人们得到 $\boldsymbol{E}$ 的著名波动方程:

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{E}}=0. \qquad [25.3]$$

作

$$\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{H},\qquad \boldsymbol{H}\to-\boldsymbol{E} \qquad [25.4]$$

的代换,[24.1],[25.2],[24.3]和[25.1]仍然是正确的。
因此,

$$\nabla^2\boldsymbol{H}-\frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{H}}=0 \qquad [25.5]$$

也成立。

作为波动方程组[25.3]和[25.5]的解的一个例子，我们考察平面波:

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)},\qquad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)} \qquad [25.6]$$

(对这些方程式,实际上应考虑其实部，因为只有它们才具有物理意义。)我们曾令

$$\omega=2\pi\nu, \quad [25.7]$$

$$\boldsymbol{k}=k\boldsymbol{n}, \quad [25.8]$$

式中 ν 是频率, $\boldsymbol{n}$ 是波法线; 即, 单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 是垂直于等相面, 即所谓波面: $(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x})=$常数。在沿 $\boldsymbol{n}$ 方向相距 $\lambda=2\pi/k$ 处的一点, 其相位亦保持不变。于是有

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}, \quad [25.9]$$

式中 λ 表示波长。对于[25.6]式所给出的那种形式的解，微分算符等效于某种乘数:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\sim i\boldsymbol{k}, \ \frac{\partial}{\partial t}\sim -i\omega,$$

$$\nabla^2\sim -k^2, \frac{\partial^2}{\partial t^2}\sim -\omega^2. \quad [25.10]$$

把这些代入[25.3]式, 得

$$\left(-k^2+\frac{1}{c^2}\omega^2\right)E=0, \ k^2=\frac{\omega^2}{c^2}. \quad [25.11]$$

为了保持相位不变，我们必须以速度 ω/k 沿 $\boldsymbol{n}$ 方向前进，因为此时有

$$x_t=\frac{\omega}{k}t, \ k(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x})=\omega t.$$

如此,

$$\frac{\omega}{k}=c \quad [25.12]$$

是相速。量 c 包含在微分方程组内且与 ω 无关。此外，从[24.3]和[25.1]两式得

$$i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{H})=0, \quad i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E})=0,$$

所以　　　　　　$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}=0.$$

于是，$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 都垂直于 $\boldsymbol{n}$；即，电磁波是横波。

由于[25.10]式，从[25.2]式得到

$$i(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H})=-\frac{i\omega}{c}\boldsymbol{E},$$

而从[25.8]和[25.12]两式则得

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{E},\quad 或\quad \boldsymbol{E}=\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{n}.$$

于是，$\boldsymbol{E}$ 垂直于 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{H}$。因此，$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}=0$，此外，因为 $\boldsymbol{n}$ 是单位矢量，而且 $\boldsymbol{H}$ 垂直于 $\boldsymbol{n}$，所以

$$|\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{H}|\text{ 或 }E^2=H^2。\qquad [25.13]$$

由于作[25.4]式给出的代换后，方程组仍然是正确的，于是有

$$\boldsymbol{H}=-(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n})=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}.$$

而且可以看出，按 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 的顺序构成一右手正交系。

从[25.1]和[25.13]两式得到以后我们将要用到的关系式

$$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{n}E^2=\boldsymbol{n}H^2=\frac{1}{2}(E^2+H^2)\boldsymbol{n}.\qquad [25.14]$$

麦克斯韦得到的这些结果涉及到电磁波。因为这里：

1. 很自然地得出用机械论者的以太概念很难解释的横向性，而且

2. 一个被定义为纯电磁量的、并且从而由电流的磁场来确定的量 c 显示出与经验确定的光速相符合，所以就自然地可把光当作是电磁波了。

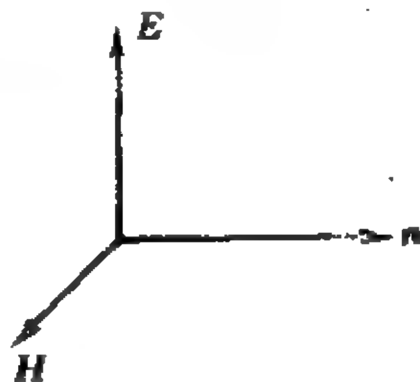


图　25.1

因此，光只不过是某种特殊波长的电磁波(光的电磁理论)。后来，赫兹和其他人发现了其它波长的电磁波(无线电波，红外线)。

§ 26. 能量守恒和动量守恒

我们从麦克斯韦方程组[24.1], [24.2], [24.3]和[24.4]出发。

根据[17.5]式，单位体积所受的力为

$$\boldsymbol{k}=\rho \boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{H}. \qquad [26.1]$$

因此，单位时间内，单位体积所作的功为

$$A=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{E}. \qquad [26.2]$$

a. 能量守恒

以 $c\boldsymbol{E}/4\pi$ 乘[24.2]式，得出

$$A+\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{E}}-\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{curl}\boldsymbol{H}=0,$$

而以 $c\boldsymbol{H}/4\pi$ 乘[24.1]式，给出

$$\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{H}\cdot\dot{\boldsymbol{H}}+\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{curl}\boldsymbol{E}=0.$$

把这两个式子加起来，且由于

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{curl}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{curl}\boldsymbol{H},$$

便得到关系式

$$A+\frac{\partial W}{\partial t}+\mathrm{div}\boldsymbol{S}=0. \qquad [26.3]$$

式中

$$W=\frac{1}{8\pi}(E^2+H^2) \qquad [26.4]$$

是能量密度，而

$$\boldsymbol{S}=\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \qquad [26.5]$$

是坡印廷矢(量)。[26.3]式是场论中的能量守恒定律。对[26.3]式积分，给出

$$\int A\mathrm{d}V+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int W\mathrm{d}V+\oint S_n\mathrm{d}f=0. \qquad [26.6]$$

式中，第一项是系统每秒所作的总功，而第二项是系统中每秒能量的增量。于是，显然第三项必定代表每秒流出系统界面的总能量。所以，$\boldsymbol{S}$ 具有能流密度的意义。

若界面是有吸收能力的，或者它位于如此远处，以致场尚未达到其上，则第三个积分等于零。系统所作的功等于它的能量减少①。静态场的情况总是如此，因为在远距离处，$|\boldsymbol{S}|$ 至少象 $1/r^4$ 一样快地衰减。

根据[25.14]式，对于平面波，有

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}cW. \qquad [26.7]$$

它意味着能量传播的速度等于波的相速，因而是很令人满意的。

***b.* 动量守恒**

虽然这里有附加项，思路却与 §18 相似。

从[26.1]式和麦克斯韦方程组[24.1]至[24.4]，得到

$$4\pi\boldsymbol{K}=4\pi\int\boldsymbol{k}\mathrm{d}V=4\pi\int\left(\rho\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{H}\right)\mathrm{d}V$$

$$=\int\left\{\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{div}\boldsymbol{E}+\mathrm{curl}\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{E}}\times\boldsymbol{H}\right\}\mathrm{d}V.$$

由于

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{div}\boldsymbol{H}=0 \quad 和 \quad \left(\mathrm{curl}\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{H}}\right)\times\boldsymbol{E}=0,$$

故有

$$0=\int\left\{\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{div}\boldsymbol{H}+\mathrm{curl}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}-\frac{1}{c}\boldsymbol{E}\times\dot{\boldsymbol{H}}\right\}\mathrm{d}V。$$

利用缩写

$$\boldsymbol{J}_e=\int\{\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{div}\boldsymbol{E}+\mathrm{curl}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}\}\mathrm{d}V,$$

---

① 英译本误译为"增加"。——中译者注

$$\boldsymbol{J}_m=\int\{\boldsymbol{H}\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{H}+\operatorname{curl}\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}\}dV,$$

则得

$$4\pi\boldsymbol{K}=\boldsymbol{J}_e+\boldsymbol{J}_m-\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}dV.$$

§18 中已证明

$$\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{J}_e+\boldsymbol{J}_m)=\oint\boldsymbol{T}_n df,$$

式中

$$T_{ik}=T_{ik}^{(e)}+T_{ik}^{(m)} \qquad [26.8]$$

已在[18.7]式给出。因而得到

$$\boldsymbol{K}=\oint\boldsymbol{T}_n df-\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int\boldsymbol{S}dV. \qquad [26.9]$$

对于稳态场右边第二项精确地等于零，而对准静场则可略去。这关系式的微分形式是

$$k_i=\sum_k\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial S_i}{\partial t} \qquad (i=1,2,3). \qquad [26.10]$$

[26.9]和[26.10]式的意义是仅当电磁场被认为不仅具有能量而且具有动量时，动量才能守恒。若用 $\boldsymbol{P}_{机}$ 表示总机械动量，则

$$\frac{d\boldsymbol{P}_{机}}{dt}=\boldsymbol{K}. \qquad [26.11]$$

由此，必须认为场具有一个电磁动量

$$\boldsymbol{P}_{电磁}=\frac{1}{c^2}\int\boldsymbol{S}dV. \qquad [26.12]$$

这意味着每立方厘米中的动量为

$$\boldsymbol{g}=\frac{1}{c^2}\boldsymbol{S}. \qquad [26.13]$$

若[26.9]式积分域的边界面位于在某确定时刻场尚未到达处，则如彭加勒和爱因斯坦已指出的

$$\oint \boldsymbol{T}_n \mathrm{d}f=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{P}_{机}+\boldsymbol{P}_{电磁})=0,\ \ \boldsymbol{P}_{机}+\boldsymbol{P}_{电磁}=恒量. \qquad [26.14]$$

然而，一般说来，$\boldsymbol{P}_{机}$ 和 $\boldsymbol{P}_{电磁}$ 并不分别为恒量。

c. 辐射压力

平面波是一种数学理想化情况：它是无限延展的，因而具有无限能量；其频率是精确地确定的。然而，我们能在任意小的范围内变更波长。这就足以产生一列有限波列了(傅里叶积分理论)。这样具有很多驼峰但范围有限的波列叫做波包(图 26.1)。根据[26.7]式，其能量和动量为

$$E=\int W\mathrm{d}V,\ \ P_{电磁}=\frac{1}{c^2}\int S\mathrm{d}V=n\frac{E}{c},$$

因此，沿一确定方向传播的、线度远比波长长的波列具有动量

$$\frac{能量}{光速}。$$

为了计算辐射压力，这就足够了①。



图 26.1

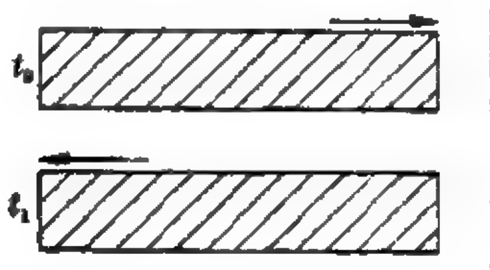


图 26.2

最简单的情况。垂直入射时的全反射。(图 26.2)。把[26.9]式应用于在 t_0 至 t_1 时间间隔内场所达到的曲面。电磁动量变化了 $2E/c$，很显然，表面受到了反冲。机械动量的变化是

---

① 辐射压力也能由[26.1]式直接计算。

$$\Delta P_{机}=\frac{2E}{c},$$

设T为波列入射到表面上的时间间隔，则足够精确地有

$$E=TFI,$$

式中F是被辐射的面积，而$I=\bar{S}_x$是辐射强度。于是，

$$\Delta P_{机}=pFT,$$

$$式中\quad p=2\frac{I}{c} \qquad [26.15]$$

是辐射压力。

容易看出，以θ角入射的波色则有

$$p=2\frac{I}{c}\cos^2\theta. \qquad [26.16]$$

对于完全吸收的情况，

$$\Delta P_{机}=\frac{E}{c},$$

$$p=\frac{I}{c}. \qquad [26.17]$$

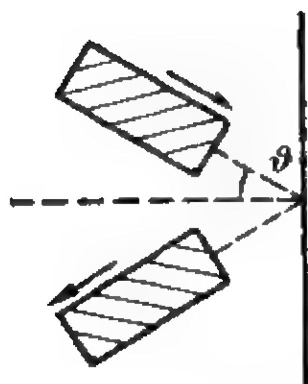


图 26.3

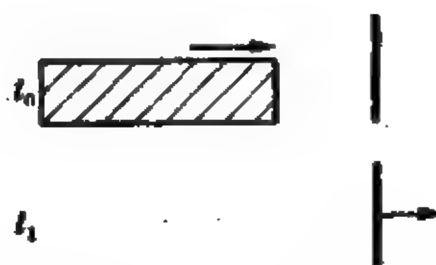


图 26.4

若无光的电磁理论便得不到这些结果。我们主要地曾用到单位体积中的电磁动量是S/c^2。辐射压力在实验上首先由列别捷夫证实了。

把动量与电磁场这样联系起来是很自然的。否则就不能得到每一时刻能量和动量的守恒。倘若光先是被发射然后又被吸收，固然，在吸收结束之后，机械动量守恒定律再次成立；然而不考虑场的存在是不自然的，因为不能理解何以物质质点应该比场更为真实。

如此，一方面，以太(现在把以太理解为所有可能的电磁场)与力学量无关而独立地被描述了，并且谈论以太的运动也是没有意义的。另一方面，理想的真空($\rho=0, \mathbf{i}=0$)的方程组只是一种理想情况。因为只有利用力学上描述的、带电荷的粒子才能产生和验证电磁场。这里，人们便遇到了值得注意的二象性.[A-1]

§ 27. 有质媒质中的电磁波

有质媒质与真空的区别在于磁化和极化。若允许 ε 和 μ 可不等于 1，则在自由电荷或电流不存在($\rho_l=\mathbf{i}_c=0$)时，麦克斯韦方程组[24.1′]，[24.2′]，[24.3′]和[24.4′]变为

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{E}=-\frac{\mu}{c}\dot{\boldsymbol{H}},\quad \mathrm{div}\boldsymbol{H}=0,$$

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{H}=+\frac{\varepsilon}{c}\dot{\boldsymbol{E}},\quad \mathrm{div}\boldsymbol{E}=0.$$

于是，波的相速为

$$v=\frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \qquad [27.1]$$

对于由

$$v=\frac{c}{n} \qquad [27.2]$$

定义的折射率，我们得到

$$n^2=\varepsilon\mu. \qquad [27.3]$$

与 § 25 相似，对于平面波，人们发现 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 在这里也构成

右手正交系。然而，$\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{H}$的振幅之比不再等于1了。而有

$$i(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E})=ik(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})=+\frac{\mu}{c}i\omega\boldsymbol{H},$$

$$k|\boldsymbol{E}|=\mu\frac{\omega}{c}|\boldsymbol{H}|,$$

$$k^2=\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\omega^2,\quad k=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu} \qquad [27.4]$$

$$|\boldsymbol{H}|=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}|\boldsymbol{E}|.$$

最后一个式子写成

$$\varepsilon E^2=\mu H^2 \qquad [27.5]$$

的形式最易记忆。

关于[27.3]式，可以指出，顺磁性或抗磁性总是很弱的，所以，对非铁磁物质，实际上 $\mu=1$，$n^2=\varepsilon(\omega)$，其中$\lim\limits_{\omega\to 0}n^2(\omega)=\varepsilon_{静态}$(静态介电常数)。电子论能阐明这一问题。对于铁磁物质，在ω的光学范围内，μ实际上也等于1，这是由于高频时不出现铁磁性的缘故。

§ 28. 电磁波的辐射

本节给出由静态偶极子或准静态偶极子产生的场的推广。

a. 电磁势。非齐次波动方程。

这里从真空中麦克斯韦方程组[24.1]、[24.2]、[24.3]和[24.4]出发。由§20和§21已知，在引进的势$\boldsymbol{A}$和φ

$$\boldsymbol{H}=\mathrm{curl}\boldsymbol{A} \qquad [28.1]$$

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{A}}-\mathrm{grad}\varphi \qquad [28.2]$$

时[24.1]和[24.3]式同样地被满足。把$\boldsymbol{A}$和φ代入[24.2]式，由于[15.9]式，得到

$$\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\dot{\varphi})-\nabla^2\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{A}}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i}.$$

把$\boldsymbol{A}$和φ代入[24.4]式，得

$$-\frac{1}{c}\mathrm{div}\dot{\boldsymbol{A}}-\nabla^2\varphi=4\pi\rho.$$

在此，对这方程稍加改动是有用的：

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\dot{\varphi})-\nabla^2\varphi+\frac{1}{c^2}\ddot{\varphi}=4\pi\rho.$$

现在可以看出，不象在准静态情况中那样要求 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$，而要求

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\dot{\varphi}=0 \quad (\text{洛伦兹条件})。 \qquad [28.3]$$

是适宜的。这样，便得到φ和$\boldsymbol{A}$的非齐次波动方程式：

$$-\nabla^2\varphi+\frac{1}{c^2}\ddot{\varphi}=4\pi\rho, \qquad [28.4]$$

$$-\nabla^2\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{A}}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i}. \qquad [28.5]$$

因为

$$\dot{\rho}+\mathrm{div}\boldsymbol{i}=0, \qquad [28.6]$$

所以，[28.3]、[28.4]和[28.5]这三个方程是相容的。在真空中($\rho=0, \boldsymbol{i}=0$)这些关系就还原为齐次波动方程组了。

将用两种不同的方法对[28.3]、[28.4]和[28.5]等式进行积分。

b. 非齐次波动方程组的积分。第一种方法。

首先，假设场在时间上是周期性的。这样导致重大简化。设电荷和电流密度为

$$\rho=\rho_0e^{-i\omega t}, \quad \boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}_0e^{-i\omega t}. \qquad [28.7]$$

则，

$$\varphi=\varphi_0e^{-i\omega t}, \quad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_0e^{-i\omega t},$$

由此得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\sim -i\omega, \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\sim -\omega^2.$$

考虑到

$$\frac{\omega}{c}=k, \tag{28.8}$$

由微分方程组[28.3]、[28.4]和[28.5]，得

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}-ik\varphi=0, \tag{28.3'}$$

$$\nabla^2\varphi+k^2\varphi=-4\pi\rho, \tag{28.4'}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}+k^2\boldsymbol{A}=-\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i}. \tag{28.5'}$$

模仿用于 §6 的方法，不难把这些方程式积分。那里证明

$$-\nabla^2\varphi=4\pi\rho$$

的解是

$$\varphi_P=\int\frac{\rho_Q\mathrm{d}V_Q}{r_{PQ}}.$$

要得到这结果，用到格临定理

$$\int(\varphi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\varphi)\mathrm{d}V=\oint\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\mathrm{d}f,$$

式中 $\psi=1/r_{PQ}$，所以

$$\nabla^2\psi=0 \quad P\neq Q.$$

对于现在的情况，在格临定理中必须令

$$\psi=\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \tag{28.9}$$

这一 ψ 满足方程式

$$\nabla^2\psi+k^2\psi=0 \quad r\neq 0. \tag{28.10}$$

证明：用极坐标，[28.10]式变为

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{\mathrm{d}^2(r\psi)}{\mathrm{d}r^2}+k^2(r\psi)\right\}=0,$$

其解为

$$r\psi = e^{\pm ikr}.$$

(在[28.9]式的解中，我们取$+i$而不取$-i$的原因以后便会明了。)

我们再次取围绕P点的一个大球K的内部作为积分域V，而用一个小球k把P点本身剔除。这样，再考虑到[28.10]和[28.4′]两式，于是我们有

$$\varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi = \varphi(\nabla^2\psi + k^2\psi) - \psi(\nabla^2\varphi + k^2\varphi) = +4\pi\rho\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}.$$

把它代入格临定理，得

$$4\pi\int_V \rho_Q \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} dV_Q = \oint_k \left(\varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) df + \oint_K \left(\varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) df.$$

在小球表面处，

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}, \qquad df = r^2 d\Omega,$$

其中$d\Omega$是立体角。并且，

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{e^{ikr}}{r} = \frac{1}{r^2}(ikr - 1)e^{ikr}.$$

这样，遍及小球面的积分变为

$$\oint_k d\Omega\left\{\varphi_Q - ikr\varphi_Q + r\frac{\partial\varphi_Q}{\partial r}\right\}e^{ikr}.$$

因为$\partial/\partial n = \partial/\partial R$，遍及大球面上的积分为

$$-\oint_K d\Omega\left\{\varphi + R\left(\frac{\partial\varphi}{\partial R} - ik\varphi\right)\right\}e^{ikR}.$$

现在把小球作极限过渡$r\to 0$。于是

$$\int_k \longrightarrow 4\pi\varphi_P.$$

若大球变为无限大，则 $R\to\infty$，$\lim\limits_{R\to\infty}\varphi=0$。

此外，我们要求，

$$\lim_{R\to\infty}R\left(\frac{\partial\varphi}{\partial R}-ik\varphi\right)=0. \qquad [28.11]$$

若要求在大 R 的渐近域中，

$$\varphi\sim\frac{e^{ikR}}{R},$$

那么，就能满足[28.11]式。由于

$$\left.\begin{matrix} e^{i(kr-\omega t)}① & \text{描述出射波} \\ e^{i(kr+\omega t)} & \text{描述入射波} \end{matrix}\right\},$$

[28.11]式的意义是我们仅考察出射波。(若在上述方程组中全用 $-ik$ 代换 ik，便可得到入射波。)[28.11]式叫做辐射条件(按索末菲)。这条件不能从微分方程组得出，而是一个重要的附加的物理要求。为使解是唯一的，必须加上这条件。

当 $R\to\infty$，在大球上的积分趋于零，并得

$$\varphi_P=\int\rho_Q\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}\mathrm{d}V_Q. \qquad [28.12]$$

类似地处理 $\boldsymbol{A}$，则得

$$\boldsymbol{A}_P=\frac{1}{c}\int\boldsymbol{i}_Q\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}\mathrm{d}V_Q. \qquad [28.13]$$

因为现在连续性方程[28.6]能写成

$$\frac{1}{c}\mathrm{div}\boldsymbol{i}-ik\rho=0,$$

所以辅助的洛伦兹条件[28.3′]式亦可满足。利用恒等式

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{a}f)\equiv f\mathrm{div}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{grad}f$$

---

① 英译本此二式符号误换。——中译者注

两次，得到

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{1}{c}\int \mathrm{d}V_Q\boldsymbol{i}_Q\cdot\mathrm{grad}_P\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}=-\frac{1}{c}\int \mathrm{d}V_Q\boldsymbol{i}_Q\cdot\mathrm{grad}_Q\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}$$

$$=-\frac{1}{c}\int \mathrm{d}V_Q\mathrm{div}_Q\left(\boldsymbol{i}_Q\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}\right)+\frac{1}{c}\int \mathrm{d}V_Q(\mathrm{div}_Q\boldsymbol{i}_Q)\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}.$$

若用高斯定理把第一个积分变换为面积分，并在无限大球面上计算，则其值为零，这样，

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=ik\int \mathrm{d}V_Q\rho_Q\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}=ik\varphi,$$

这就是周期场的洛伦兹条件。

此外，当 $\boldsymbol{A}$ 已知时，[28.3′]式对确定 φ 是很有用的。若在[28.7]式中作代换 $t\to t-r/c$，因[28.8]式，则有变换：

$$e^{-i\omega t}\longrightarrow e^{-i\omega t+ikr}$$

因而，[28.12]式和[28.13]式亦能表达为

$$\varphi_P(t)=\int \rho_Q\left(t-\frac{r_{PQ}}{c}\right)\frac{\mathrm{d}V_Q}{r_{PQ}}, \qquad [28.14]$$

$$\boldsymbol{A}_P(t)=\frac{1}{c}\int \boldsymbol{i}_Q\left(t-\frac{r_{PQ}}{c}\right)\frac{\mathrm{d}V_Q}{r_{PQ}}. \qquad [28.15]$$

这种形式的解较[28.12]式和[28.13]式的形式普遍得多。它不局限于时间-依赖的周期性（$\sim e^{-i\omega t}$）。即，倘若 ρ 和 $\boldsymbol{i}$ 是周期量的线性叠加(傅里叶积分)

$$\rho(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega,$$

$$\boldsymbol{i}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{i}(\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega,$$

则对应的解也是线性叠加的：

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega,$$

$$\boldsymbol{A}(t)=\int_{-\infty}^{-\infty}\boldsymbol{A}(\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

即，只要 ρ 和 $\boldsymbol{i}$ 能用按时间的傅里叶展开来表示，则[28.14]式和[28.15]式便成立。[28.14]和[28.15]式所给出的这种形式的 φ_P 和 $\boldsymbol{A}_P$ 叫做推迟势，（因为 ρ 和 $\boldsymbol{i}$ 取 $t-r/c$ 时的值。）它们对应于辐射条件。超前势当为

$$\varphi_P(t)=\int\rho_Q\left(t+\frac{r_{PQ}}{c}\right)\frac{dV_Q}{r_{PQ}},$$

$$\boldsymbol{A}_P(t)=\frac{1}{c}\int\boldsymbol{i}_Q\left(t+\frac{r_{PQ}}{c}\right)\frac{dV_Q}{r_{PQ}}.$$

这些势表示入射球面波。尽管它们是同一组微分方程的解，但在自然界是不易实现的。在无限空间中，自然界只表现第一组解。

c. 周期场公式的讨论

解[28.12]和[28.13]的普遍结论是：在远离电流系(即，ρ 和 $\boldsymbol{i}$ 显著不为零的区域）处形成一个辐射区①。若电荷局限在有限空间内，静态场和准静态场按 $1/r^2$ 衰减。在迅变场情况中，不仅势而且场强也按 $1/r$ 衰减。

对下面讨论来说，区别三种不同长度是重要的：

d＝电流系的线度；

R＝场点 P 到电流系的距离，

$\lambda=2\pi/k$＝波长.

1. 辐射区的一般讨论。考察

$$R\gg d \quad 和 \quad R\gg\lambda$$

处一场点 P（即，$kR\gg1$）。这两个条件表征辐射区。对于比值 d/λ，则完全未作任何假设。

选取电流系内一点 O 为坐标原点，则

$$r_{PQ}=R-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_Q,$$

式中 $\overline{OP}=R$，$\boldsymbol{x}_Q$＝源点 Q（电流系中一点）的位矢，而 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{x}_P/r$

① 德文原本为“波区”，后文也是这样。——中译者注

为在P方向上的单位矢。在[28.12]和[28.13]式中，我们能以R代替分母中的r_{PQ}(在指数中却不能!)。则，

$$\varphi_P=\frac{e^{ikR}}{R}\int dV_Q\rho_Q e^{-ik(n\cdot x_Q)},$$

$$A_P=\frac{e^{ikR}}{R}\frac{1}{c}\int dV_Q i_Q e^{-ik(n\cdot x_Q)}.$$

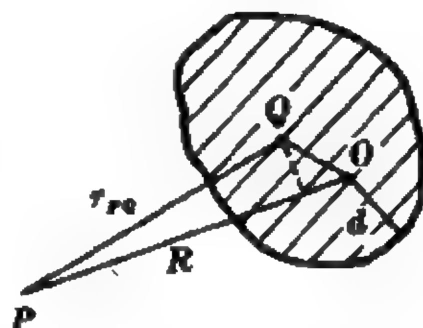


图 28.1

过渡到场强

$$H=\mathrm{curl}A,\quad E=-\frac{1}{c}\dot{A}-\mathrm{grad}\varphi$$

时，微分给出两项：微分$1/R$时，数量级乘上$1/R$因子；微分指数函数时，却乘上k。因为$kR\gg1$，第一项可略去，并得

$$\frac{\partial}{\partial x_P}\sim ik\frac{\partial R}{\partial x_P}\sim ik\frac{x_P}{R}\sim ikn.$$

因此，

$$H=\mathrm{curl}A=ik(n\times A)$$
$$=\frac{ik}{c}\frac{e^{ikR}}{R}\int(n\times i)_Q e^{ik(n\cdot x_Q)}dV_Q.\quad[28.16]$$

因

$$\mathrm{div}A=ik(n\cdot A),$$

由[28.3′]式得

$$\varphi=n\cdot A.$$

因此，

$$E=ik(A-n(n\cdot A))=ikA_\perp$$
$$=\frac{ik}{c}\frac{e^{ikR}}{R}\int(i_\perp)_Q e^{-ik(n\cdot x_Q)}dV_Q,\quad[28.17]$$

式中

$$i_\perp=i-n(n\cdot i).$$

因$n\times i=n\times i_\perp$，于是可以看出：

(1) 只有 $\boldsymbol{i}$ 的垂直于 $\boldsymbol{n}$ 的分量在产生场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 中起作用;

(2) $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 之间存在着与在平面波的情况相同 (§25) 的关系:

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}=0,$$

$$|\boldsymbol{E}|^2=|\boldsymbol{H}|^2,\quad \boldsymbol{S}=\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\frac{c}{4\pi}|\boldsymbol{E}|^2\cdot\boldsymbol{n}.$$

代替[28.17]式,我们亦能写成

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{R}\frac{1}{c^2}\int\left(\frac{\partial \boldsymbol{i}_\perp}{\partial t}\right)_{\text{推迟}}\mathrm{d}V. \qquad [28.18]$$

2. 辐射区中的偶极辐射。除 $R\gg d$ 和 $R\gg\lambda$ 条件外,现在还要求

$$\lambda\gg d$$

(即,$kd\ll1$)。例如,对于天线,这种要求常常是能满足的。

指数函数 $e^{-ik(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x})}$ 能展开为幂级数。这对应于把辐射分解为多极辐射(偶极辐射、四极辐射,等等)。在第一级近似中,我们令

$$e^{-ik(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x})}=1.$$

(即,略去电流系内的推迟效应。)于是,得

$$\boldsymbol{E}=ik\frac{e^{ikR}}{R}\frac{1}{c}\int\boldsymbol{i}_\perp\mathrm{d}V,$$
$$\boldsymbol{H}=ik\frac{e^{ikR}}{R}\frac{1}{c}\boldsymbol{n}\times\int\boldsymbol{i}\mathrm{d}V. \qquad [28.19]$$

这种辐射叫做偶极辐射。这时,能明显地得出场强与 $\boldsymbol{n}$ 的关系。令

$$\boldsymbol{j}=\int\boldsymbol{i}\mathrm{d}V. \qquad [28.20]$$

则

$$\boldsymbol{E}=\frac{ik}{c}\frac{e^{ikR}}{R}\boldsymbol{j}_\perp,\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}. \qquad [28.21]$$

对平行于 z 轴的线性振荡,

$$|\boldsymbol{j}_\perp|=|\boldsymbol{j}|\sin\theta.$$

于是坡印廷矢量($S=(c/4\pi)|E|^2n$)为

$$S_n=\frac{c}{4\pi}\frac{k^2}{c^2R^2}j_0^2\sin^2\theta\sin^2(kR-\omega t+\alpha)$$

$$=\frac{1}{4\pi R^2}\frac{1}{c^3}\left(\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}t}\right)^2_{推迟}\sin^2\theta.$$

因为 $\mathrm{d}f=R^2\mathrm{d}\Omega$, $\frac{1}{4\pi}\int\sin^2\theta\mathrm{d}\Omega=2/3$, $\frac{1}{4\pi}\int\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=1/3$, 对整个球面积分便得到每秒辐射的能量:

$$\int S_n\mathrm{d}f=\frac{2}{3}\frac{1}{c^3}\left(\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}t}\right)^2_{推迟}. \qquad [28.22]$$

辐射系为一点电荷且作整体振动的情况:

$$i=\rho v,\quad j=\int i\mathrm{d}V=ev,$$

包含在上述情况中。这样,对振动的点电荷,若 λ 大于电荷运动区域的线度,则

$$\int S_n\mathrm{d}f=-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{v}^2_{推迟}. \qquad [28.23]$$

自然,λ 必然也大于电荷的线度:$\lambda\gg a$。对于电子 $a\sim e^2/mc^2\sim10^{-13}$ 厘米。

引进极化矢量 P 常常是有用的:

$$i=\frac{\partial P}{\partial t},\qquad \rho=-\mathrm{div}P. \qquad [28.24]$$

对于周期过程,则 $P=ii/\omega$ 以及

$$E=-\frac{e^{ikR}}{R}\frac{1}{c^2}\int\frac{\partial^2P_\perp}{\partial t^2}\mathrm{d}V=-\frac{e^{ikR}}{R}\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2\Pi_\perp}{\mathrm{d}t^2}, \qquad [28.25]$$

式中

$$\Pi=\int P\mathrm{d}V,\qquad j=\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}t}. \qquad [28.26]$$

非线性振荡。令 Π_1 和 Π_2 为振荡的两个正交线性分量。则

$$E_1=-\frac{e^{ikR}}{R}\frac{1}{c^2}\ddot{\Pi}_{1\perp}=H_1\times n,$$

$$E_2=-\frac{e^{ikR}}{R}\frac{1}{c^2}\ddot{\Pi}_{2\perp}=H_2\times n.$$

于是，坡印廷矢量不是加性的：

$$S=S_1+S_2+\frac{c}{4\pi}\left\{E_1\times H_2+E_2\times H_1\right\}.$$

然而，当积分遍及全部方向时，交叉项便消失。即，在 n 方向上，它们的分量为

$$\frac{c}{4\pi}(n\cdot E_1\times H_2+n\cdot E_2\times H_1)$$

$$=\frac{c}{4\pi}(E_1\cdot H_2\times n+E_2\cdot H_1\times n)$$

$$=\frac{c}{4\pi}2(E_1\cdot E_2)=\text{常数}[\Pi_1-n(n\cdot\Pi_1)]\cdot[\Pi_2-n(n\cdot\Pi_2)]$$

$$=\text{常数}[(\Pi_1\cdot\Pi_2)-(n\cdot\Pi_1)(n\cdot\Pi_2)],$$

式中常数意味着与 n 无关。现在利用 Π_1 垂直于 Π_2 的规定。设 Π_1 平行于 x 方向，而 Π_2 平行于 y 方向，则上面表达式变为

$$(\text{常数})'\times n_x n_y.$$

积分遍及球面时，它等于零。这样，若振荡是互相垂直的，便得到一个重要的关系

$$\oint S_n \mathrm{d}f=\oint S_{1n}\mathrm{d}f+\oint S_{2n}\mathrm{d}f. \qquad [28.27]$$

特殊情况：圆振荡，在光学中，这情况是重要的。这里，线偏振光沿 x 方向和 y 方向发射，而圆偏振光沿 z 方向。在其它任意方向，光是椭圆偏振的。

3. 赫兹矢量[①] 在辐射区中，有 $kR\gg1$（或$R\gg\lambda$）的条件。现

① 德文原本是“赫兹振子”。——中译者注

在我们将不再作这种限制。而是，对任意 kR，只假定

$$d \ll \lambda, \quad d \ll R.$$

虽然我们将不再限于考察辐射区，然而这种类型的辐射还是叫做偶极辐射。

在[28.12]和[28.13]式中，我们再次用平均值 R 代替 r_{PQ}，则

$$\mathbf{A}=\frac{1}{c}\frac{e^{ikR}}{R}\int \mathbf{i}\mathrm{d}V=\frac{1}{c}\frac{e^{ikR}}{R}\boldsymbol{j}.$$

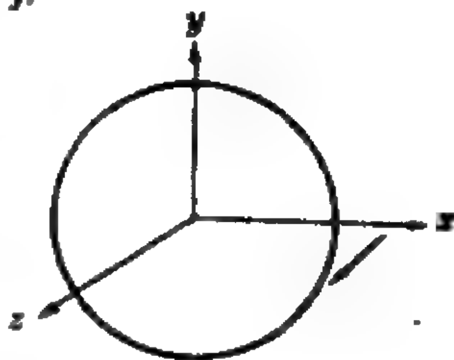


图 28.2

为了与常用的表示法联系起来，令

$$\boldsymbol{j}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Pi}}{\mathrm{d}t}=-i\omega\boldsymbol{\Pi},$$

所以

$$\frac{1}{c}\boldsymbol{j}=-ik\boldsymbol{\Pi}$$

和

$$\boldsymbol{A}=-ik\frac{e^{ikR}}{R}\boldsymbol{\Pi}. \qquad [28.28]$$

由于[28.3′]式，并考虑到 $\boldsymbol{\Pi}$ 与位置无关，则

$$\varphi=-\mathrm{div}\left(\frac{e^{ikR}}{R}\boldsymbol{\Pi}\right)=-\boldsymbol{\Pi}\cdot\mathrm{grad}\,\frac{e^{ikR}}{R}, \qquad [28.29]$$

现在，来计算场强(不略去 $1/kR$ 幂)。已能看出此解与偶极子有关，因为当 $k=0$ 时，φ 变为电矩为 $\boldsymbol{\Pi}$ 的偶极子的静电势。然而，若偶极子振荡，则其它各项仍然作出重要的贡献。于是有

$$\boldsymbol{H}=\mathrm{curl}\boldsymbol{A}=-ik\,\mathrm{grad}\frac{e^{ikR}}{R}\times\boldsymbol{\Pi}.$$

因为

$$\mathrm{grad}f(R)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}R}\boldsymbol{n},$$

式中 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{x}/R$，所以

$$\boldsymbol{H}=-ik\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(\frac{e^{ikR}}{R}\right)(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\Pi})=-ik\frac{e^{ikR}}{R}\left(ik-\frac{1}{R}\right)\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\Pi}.$$

从而

$$H=\frac{e^{ikR}}{R}\left(k^2+\frac{ik}{R}\right)n\times\Pi. \qquad [28.30]$$

第一项已在辐射区中得到，第二项在近距离处特别大；而φ变为

$$\varphi=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(\frac{e^{ikR}}{R}\right)(n\cdot\Pi)=\left(-\frac{ik}{R^2}+\frac{1}{R^3}\right)e^{ikR}x\cdot\Pi.$$

计算 gradφ，得

$$\mathrm{grad}\varphi=\frac{e^{ikR}}{R}\left\{\left(-\frac{ik}{R}+\frac{1}{R^2}\right)\Pi+\left(k^2+\frac{3ik}{R}-\frac{3}{R^2}\right)n(n\cdot\Pi)\right\}.$$

于是，

$$\begin{aligned}E&=ikA-\mathrm{grad}\varphi=\frac{e^{ikR}}{R}k^2\Pi-\mathrm{grad}\varphi\\&=\frac{e^{ikR}}{R}\left\{\left(k^2+\frac{ik}{R}-\frac{1}{R^2}\right)\Pi\right.\\&\qquad\left.+\left(-k^2-\frac{3ik}{R}+\frac{3}{R^2}\right)n(n\cdot\Pi)\right\}.\end{aligned} \qquad [28.31]$$

H和E的这种解是以赫兹振荡偶极子(赫兹振子)命名而为人们所熟知。

过渡到 $d\to0$ 的极限的可能性是存在的。于是，除存在奇点的原点外，我们的公式是齐次方程组($\rho=0, i=0$)的解。

对于 $R\ll\lambda(kR\ll1)$的情况，我们有

$$\mathbf{E}=\frac{1}{R^3}\left\{3n(n\cdot\Pi)-\Pi\right\}.$$

这是电矩为Π的静电偶极子的场。(若设想 z 轴是沿着n的方向，便立即可以看出此点)。

对于 H，我们得

$$H=\frac{ik}{R^2}n\times\Pi=-\frac{1}{cR^2}n\times j=+\frac{1}{c}\frac{j\times n}{R^2}.$$

这只不过是电流为 j 的毕奥-萨伐尔场。

在辐射区，$R \gg \lambda(kR \gg 1)$，我们得到先前的结果

$$\boldsymbol{H}=k^2\frac{e^{ikR}}{R}\boldsymbol{n}\times\Pi,$$

$$\boldsymbol{E}=k^2\frac{e^{ikR}}{R}\left\{\Pi-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\Pi)\right\}.$$

d. 非齐次波动方程的积分。第二种方法

几乎全部光学都可应用周期(时间)依存的方法来处理。然而，我们还是给出另一种关于积分非齐次波动方程

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-4\pi\rho(x,t) \qquad [28.32]$$

的方法。在这第二种方法中，不作关于时间的傅里叶积分或傅里叶级数的分解。

引进一个新变量。

$$t=\tau-\frac{r}{c} \qquad [28.33]$$

其中 $r=|\boldsymbol{x}_p-\boldsymbol{x}_Q|$。并用球坐标①$r$、$\theta$、$\psi$。于是，

$$\rho(x,t)=\rho\left(r,\eta,\psi;\tau-\frac{r}{c}\right).$$

按如下的表示法

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial r}&\equiv\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)_t \quad (t\text{ 为常数时的偏微分}),\\ \frac{dF}{dr}&\equiv\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)_\tau \quad (\tau\text{ 为常数时的偏微分}).\end{aligned} \qquad [28.34]$$

我们有

$$\frac{\partial F}{\partial r}=\frac{dF}{dr}+\frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial \tau}.$$

① 德、英文本都写作"极坐标"。——中译者注

矢量$\boldsymbol{A}$的散度在τ固定的情况下变为

$$\operatorname{div}_\tau \boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2A_r)+(\text{对}\ \theta\ \text{和}\ \psi\ \text{的导数})①,$$

在t固定的情况下，为

$$\operatorname{div}_t \boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+(\text{对}\ \theta\ \text{和}\ \psi\ \text{的导数}).$$

根据上面的关系，应有

$$\operatorname{div}_\tau \boldsymbol{A}=\operatorname{div}_t \boldsymbol{A}-\frac{1}{c}\frac{\partial A_r}{\partial t}.$$

应用于$\mathbf{A}=(1/r)\nabla_t\varphi$，（式中$\nabla_t$表示在$t$固定时的梯度。）给出

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_\tau\left(\frac{1}{r}\nabla_t\varphi\right)&=\operatorname{div}_t\left(\frac{1}{r}\nabla_t\varphi\right)-\frac{1}{rc}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial r}\\&=\frac{1}{r}\nabla_t^2\varphi+\left(\nabla_t\frac{1}{r}\right)(\nabla_t\varphi)-\frac{1}{rc}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial r}\\&=\frac{1}{r}\nabla_t^2\varphi-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{1}{rc}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial r}.\end{aligned}$$

积分时，需要在τ固定时的导数，因此，我们用$\mathrm{d}/\mathrm{d}r$代替$\partial/\partial r$。于是有

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_\tau\left(\frac{1}{r}\nabla_t\varphi\right)&=\frac{1}{r}\nabla_t^2\varphi-\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}-\frac{1}{r^2}\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{rc}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}-\frac{1}{rc^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\\&=\frac{1}{r}\left\{\nabla_t^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right\}-\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left\{\varphi+r\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\}.\end{aligned}$$

[28.35]

我们对用小球k②把P点（$r=0$）剔除的整个体积积分这一方程（在τ固定情况下），则得到

$$\int_{F+k}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_t\mathrm{d}f=-4\pi\int\frac{\rho_Q(r,\theta,\psi;\tau-r/c)}{r}\mathrm{d}V_Q$$

① 英译本有误，中译本已改正。——中译者注

② 为了与前面一致，已改K为k，这样也与德文原本一致。——中译者注

$$-\int_F\left(\varphi+r\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\mathrm{d}\Omega+\int_k\left(\varphi+r\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\mathrm{d}\Omega,$$

式中$\mathrm{d}\Omega$是立体角元而$\mathrm{d}V_Q=r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega$。在$k\to0$的极限情况中，等式左端遍及小球的积分等于零，而右端的积分等于$4\pi\varphi_P$。借助适用于任意曲面F的几何关系$\mathrm{d}\Omega=(1/r^2)\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\mathrm{d}f$，得到重要的公式

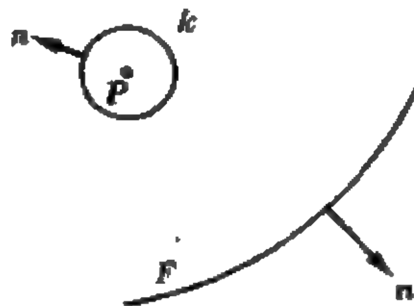


图 28.3

$$\varphi_P(\tau)=\int\frac{\rho_Q\left(r,\theta,\psi;\tau-\frac{r}{c}\right)}{r}\mathrm{d}V_Q$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_F\mathrm{d}f\left\{\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_t+\left(\frac{\varphi}{r^2}+\frac{1}{rc}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\right\}.$$

[28.36]

在此公式中，τ是固定的并且$r\equiv r_{PQ}$。

这一公式也可作为齐次波动方程

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0$$

的一个解。在这种情况中，

$$4\pi\varphi_P=\int_F\mathrm{d}f\left\{\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_t+\left(\frac{\varphi}{r^2}+\frac{1}{rc}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\right\}.\quad[28.37]$$

若曲面F是一个球面，则$\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})=1$，$\mathrm{d}f=r^2\mathrm{d}\Omega$，$(\partial/\partial n)_t=\frac{\partial}{\partial r}$，故得

$$4\pi\varphi_P=\int_F\mathrm{d}\Omega\left\{\varphi+r\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\right\}.\qquad[28.38]$$

对这一情况，有

$$\lim_{r\to\infty}\varphi=0①.$$

此外，若还满足辐射条件

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=0, \qquad [28.39]$$

则能把曲面F移至无限远。因而面积分等于零。

对于 $\varphi=\varphi_0 e^{-i\omega t}$, $k=\omega/c$, 则又变成先前的关系。

§ 29. 匀速运动的点电荷的场

考察这种情况是为狭义相对论作准备。

我们从下列方程组出发，

$$\operatorname{div}\mathbf{A}+\frac{1}{c}\dot{\varphi}=0; ②$$

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\ddot{\varphi}=-4\pi\rho,$$

$$\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{A}}=-\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i}.$$

设电荷ρ以速度v在x方向运动，即，$x_Q=vt$。我们探求仅与场点相对于电荷的坐标$(x-vt, y, z)$有关的麦克斯韦方程组的解，所以，时间依存关系应仅以$(x-vt)$的形式出现。于是

$$\frac{\partial}{\partial t}=-v\frac{\partial}{\partial x}.$$

从

$$i_x=v\rho,\quad i_y=i_z=0,$$

得

$$A_y=A_z=0,\quad \frac{\partial A_x}{\partial x}-\frac{v}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0.$$

---

① 英译本误为$\lim_{r\to\infty}\varphi_P=0$。——中译者注

② 英译本有误，已改正。——中译者注

表达式

$$A_x=\left(\frac{v}{c}\right)\varphi$$

满足这个方程。只是还必须满足 φ 的方程:

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-4\pi\rho, \qquad [29.1]$$

因数 $(1-v^2/c^2)$ 意味着缩短。为了得到与静态相同的结果，引进

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad [29.2]$$

则 φ 的方程变为

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-4\pi\rho, \qquad [29.3]$$

且其解为

$$\varphi=\frac{e}{r'}. \qquad [29.4]$$

然而，这里

$$r'^2=\frac{(x-vt)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}+y^2+z^2. \qquad [29.5]$$

对于电场，有

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}-\mathrm{grad}\varphi;$$

$$E_x=\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$E_y=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z=-\frac{\partial\varphi}{\partial z};$$

$$\left.\begin{aligned}E_x&=\frac{e}{r'^2}\frac{x-vt}{r'}\\ E_y&=\frac{e}{r'^2}\frac{y}{r'}\\ E_z&=\frac{e}{r'^2}\frac{z}{r'}\end{aligned}\right\}\mathbf{E}=\frac{e}{r'^3}\boldsymbol{r}. \qquad [29.6]$$

所以，$\boldsymbol{E}$ 是在 $\boldsymbol{r}=(x-vt, y, z)$ 的方向上而不是沿 $\boldsymbol{r}'=(x', y, z)$ 的方向。$r'=$常数的等势面是一个扁旋转椭球（亥维赛椭球）。矢量 $\boldsymbol{E}$不垂直于这些等势面。

对于磁场，有

$$H_x=0,\ H_y=+\frac{\partial A_x}{\partial z}=+\frac{v}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial z}=-\frac{v}{c}E_z,$$

$$H_z=-\frac{\partial A_x}{\partial y}=-\frac{v}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial y}=+\frac{v}{c}E_y.$$

用 $\boldsymbol{v}=(v, 0, 0)$，上式可写成

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E} \qquad [29.7]$$

和

$$\mathbf{A}=\frac{e\boldsymbol{v}}{cr'}. \qquad [29.8]$$

这些关系是一个更普遍结果的先驱：麦克斯韦方程组对于一变换群（洛伦兹群）是不变的，该变换是对匀速运动的坐标系间所作的变换，并有如下的性质：

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=x^2+y^2+z^2-c^2t^2.$$

对坐标的一种特殊选择，其变换有下列形式

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\ y'=y, z'=z, t'=\frac{t-(v/c^2)x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

场强也是以使得麦克斯韦方程组保持不变的方式变换的。这样，自然定律对所有的参考系都相同。新颖的结果是时间也要变换。在牛顿和伽利略的物理学中，有

$$x'=x-vt,\ y'=y',\ z'=z,\ t'=t.$$

这里相反，在不同空间点上的两个事件，对于一个参考系是同时的，而对于另一个参考系就不同时了。这是与电磁场的有限传播速度密切相关的。

§ 30. 辐射阻尼

我们已看到([28.23]式)，由

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{v}^2_{推迟} \qquad [30.1]$$

给出一个振荡点电荷每秒辐射的能量。根据能量守恒定律，场必须给予电荷一个反作用力。这个力可由考虑下式而猜测出来

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{v}.$$

然而，由于能量起伏，只需要求这关系对时间平均量成立：

$$\overline{\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{v}}=\overline{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}}=-\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\overline{\dot{\boldsymbol{v}}^2}=-\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v})}+\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\overline{\ddot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}}$$

因等式右端第一项是全导数，故等于零。这样便得到辐射的反作用(辐射阻尼力)：

$$\boldsymbol{K}=+\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dddot{\boldsymbol{x}}. \qquad [30.2]$$

这仅是一种探索性的考虑。然而，这种力可从场对电子的反作用直接推导出来。为此，必须假设电荷是有限广延的。我们发现，若略去$(v/c)^2$阶各项，则[30.2]式是正确的。有限广延电荷的自(作用)力的计算[A-4]

用运动的电荷分布$(\rho, \boldsymbol{i})$代表电子，并将对电荷及其运动作某些特殊的假设。

电子在一任意点P处产生的场为

$$\boldsymbol{E}_P=-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{A}}_P-\mathrm{grad}_P\varphi_P, \qquad [30.3]$$

$$\boldsymbol{H}_P=\mathrm{curl}_P\boldsymbol{A}_P, \qquad [30.4]$$

式中

$$\varphi_P(t)=\int\rho_Q\left(t-\frac{r_{PQ}}{c}\right)\frac{\mathrm{d}V_Q}{r_{PQ}}, \qquad [30.5]$$

$$\mathbf{A}_P(t)=\frac{1}{c}\int \mathbf{i}_Q\left(t-\frac{r_{PQ}}{c}\right)\frac{dV_Q}{r_{PQ}}. \qquad [30.6]$$

本段关心的是质点本身区域中存在的场。由于这区域很小，因而推迟现象不起主要作用。按 $-r/c$ 幂展开：

$$\varphi_P=\int\frac{1}{r_{PQ}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{r_{PQ}}{c}\right)^n\frac{\partial^n\rho_Q}{\partial t^n}dV_Q$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{c}\right)^n\frac{\partial^n}{\partial t^n}\int r_{PQ}^{n-1}\rho_Q dV_Q,$$

$$\mathbf{A}_P=\frac{1}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{c}\right)^n\frac{\partial^n}{\partial t^n}\int r_{PQ}^{n-1}\mathbf{i}_Q dV_Q.$$

在 φ 的表达式中，$n=0$ 的项就是库仑势。因 $\int\rho_Q dV_Q=e=$ 常数以及 $(\partial/\partial t)$（常数）$=0$，所以，$n=1$ 的项为零。在级数中其余各项里，用 $n+2$ 代换 n，则得

$$\varphi_P=\int\frac{\rho_Q}{r_{PQ}}dV_Q+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}\left(-\frac{1}{c}\right)^{n+2}\frac{\partial^{n+2}}{\partial t^{n+2}}\int r_{PQ}^{n+1}\rho_Q dV_Q.$$

这里，$\partial/\partial t$ 仅作用于 ρ_Q。应用连续性方程

$$\frac{\partial\rho_Q}{\partial t}=-\mathrm{div}_Q\mathbf{i}_Q,$$

并由于恒等式[4.10]（高斯定律）以及在积分号下，

$$\mathbf{i}_Q\cdot\mathrm{grad}_Q=-\mathbf{i}_Q\cdot\mathrm{grad}_P,$$

便得

$$\varphi_P=\int\frac{\rho_Q}{r_{PQ}}dV_Q-\frac{1}{c^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}$$

$$\times\left(-\frac{1}{c}\right)^n\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}}\int\mathbf{i}_Q\cdot\mathrm{grad}_P r_{PQ}^{n+1}dV_Q.$$

所以，从[28.2]式得到电场强度

$$\boldsymbol{E}_P=-\mathrm{grad}_P\int\frac{\rho_Q}{r_{PQ}}\mathrm{d}V_Q-\frac{1}{c^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{c}\right)^n\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}}$$

$$\times\int\left\{\frac{1}{n!}\boldsymbol{i}_Q r_{PQ}^{n-1}-\frac{1}{(n+2)!}\mathrm{grad}_P(\boldsymbol{i}_Q\cdot\mathrm{grad}_P r_{PQ}^{n+1})\right\}\mathrm{d}V_Q. \qquad [30.7]$$

为了计算场作用在质点上的力，我们作如下假设：

1. 电荷分布是刚性的，且仅作移动(虽然是非匀速的)。即

$$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x},t)=\rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{v}(t), \qquad [30.8]$$

式中 $\boldsymbol{v}(t)$与 $\boldsymbol{x}$ 无关。

2. 选择 $v/c\ll1$ 的参考系。仅取 v/c 的零阶项。这意味着对加速度或 $\boldsymbol{v}$ 的高阶时间导数的大小不作限制性的假设。的确，我们的推导在电子的瞬时静止系统中是精确的。此外，v/c 的第一阶项等于零，所以，第一个被略去的项是$(v/c)^2$ 阶的。

根据[26.1]和[30.8]两式，单位体积的力为

$$\boldsymbol{k}=\rho(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}).$$

作用在电子上的总力仍然是

$$\boldsymbol{K}=\int\rho_P\boldsymbol{E}_P\mathrm{d}V_P,$$

因为磁的洛伦兹力是$(v/c)^2$ 阶的。若把展开式[30.7]代入上面$\boldsymbol{K}$的表达式中，则因

$$\iint\rho_P\rho_Q\frac{\boldsymbol{x}_P-\boldsymbol{x}_Q}{r_{PQ}^3}\mathrm{d}V_P\mathrm{d}V_Q=0,$$

可以看出库仑项消失。(交换积分变量，便可看出。)只保留

$$\boldsymbol{K}=\sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{K}^{(n)}, \qquad [30.9]$$

式中

$$K^{(n)}=-\left(-\frac{1}{c}\right)^{n+2}\int\rho_P\mathrm{d}V_P\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}}$$

$$\times\int\rho_Q\left\{\frac{1}{n!}vr_{PQ}^{n-1}-\frac{1}{(n+2)!}\mathrm{grad}_P(v\cdot\mathrm{grad}_P r_{PQ}^{n+1})\right\}\mathrm{d}V_Q.$$

[30.10]

主要项是 $K^{(0)}$ 和 $K^{(1)}$。

在计算 $K^{(0)}$ 时，出现含有 $\partial\rho_Q/\partial t$ 的项。根据[24.5]和[30.8]两式，它等于 $-\mathrm{div}_Q(\rho_Q v)$。运用积分定理[8.7]可将积分项

$$+\frac{1}{c^2}\iint\rho_P\mathrm{div}_Q(\rho_Q v)\left\{v\frac{1}{r_{PQ}}-\frac{1}{2}\mathrm{grad}_P(v\cdot\mathrm{grad}_P r_{PQ})\right\}\mathrm{d}V_P\mathrm{d}V_Q$$

变换为

$$-\frac{1}{c^2}\iint\rho_P\rho_Q v\cdot\mathrm{grad}_Q\left\{v\frac{1}{r_{PQ}}-\frac{1}{2}\mathrm{grad}_P(v\cdot\mathrm{grad}_Q r_{PQ})\right\}\mathrm{d}V_P\mathrm{d}V_Q.$$

因为微分算符仅作用于 r_{PQ}，所以 grad_Q 可用 $-\mathrm{grad}_P$ 代换，反之亦然，于是上面的积分项等于

$$+\frac{1}{c^2}\iint\rho_P\rho_Q v\cdot\mathrm{grad}_P\left\{v\frac{1}{r_{PQ}}-\frac{1}{2}\mathrm{grad}_Q(v\cdot\mathrm{grad}_Q r_{PQ})\right\}\mathrm{d}V_P\mathrm{d}V_Q.$$

交换积分变量会得到同样的结果（虽然反号）。这表明该项必须为零。于是，$K^{(0)}$ 中仍保留的项为

$$K^{(0)}=-\frac{1}{c^2}\iint\rho_P\rho_Q\left\{\dot{v}\frac{1}{r_{PQ}}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\mathrm{grad}_P(\dot{v}\cdot\mathrm{grad}_P r_{PQ})\right\}\mathrm{d}V_P\mathrm{d}V_Q.$$

假设电荷分布是球对称的，则可简化这一积分。关于

$$\frac{\partial^2 r_{PQ}}{\partial x_{P_i}\partial x_{P_k}}=\delta_{ik}\frac{1}{r_{PQ}}-\frac{(x_{P_i}-x_{Q_i})(x_{P_k}-x_{Q_k})}{r_{PQ}^3}$$

的积分，当 $i\neq k$ 时为零，并且可用 $\nabla^2 r/3=2/3r$ 代换 $\partial^2 r_{PQ}/\partial x^2_{P_i}$，

所以，

$$\mathrm{grad}_P(\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\mathrm{grad}_P r_{PQ})\to\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{v}}\frac{1}{r_{PQ}}$$

和

$$\boldsymbol{K}^{(0)}=-\mu\dot{\boldsymbol{v}}, \qquad [30.11]$$

式中

$$\mu=\frac{2}{3}\frac{1}{c^2}\iint\frac{\rho_P\rho_Q}{r_{PQ}}\mathrm{d}V_P\mathrm{d}V_Q. \qquad [30.12]$$

因为

$$\frac{1}{2}\iint\frac{\rho_P\rho_Q}{r_{PQ}}\mathrm{d}V_P\mathrm{d}V_Q=E_{\text{静电}}$$

表示静电能(参见[4.5]式)，故 μ 也能写成

$$\mu=\frac{4}{3}\frac{E_{\text{静电}}}{c^2}. \qquad [30.13]$$

因为 $\boldsymbol{K}^{(0)}$有惯性力的特征，所以 μ 能诠释为电磁质量。若认为电荷局限在半径为 a 的球体内，则 $E_{\text{静电}}$ 具有 e^2/a 的数量级，其中 e 是电子的电荷(参见：§5)。

关于 $\boldsymbol{K}^{(1)}$，我们求得

$$\boldsymbol{K}^{(1)}=+\frac{1}{c^3}\int\rho_P\mathrm{d}V_P\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\rho_Q\left\{\boldsymbol{v}-\frac{1}{6}\mathrm{grad}_P(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}_P r_{PQ}^2)\right\}\mathrm{d}V_Q.$$

因为

$$\mathrm{grad}_P(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}_P r_{PQ}^2)=2\boldsymbol{v}$$

和

$$\int\rho_P\mathrm{d}V_P=\int\rho_Q\mathrm{d}V_Q=e,$$

所以

$$\boldsymbol{K}^{(1)}=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\boldsymbol{v}} \qquad [30.14]$$

是辐射阻尼力。它与电荷的分布完全无关。(特别是，允许 $a\to 0$。)

[30.9]展开式的高次项与 a 的幂成比例:

$$K^{(2)}\propto a, \qquad K^{(3)}\propto a^2.$$

若 a 足够小，这些都可以略去。

因此，除[30.14]式所给出的阻尼力外，我们还得到另外一项([30.11]式中的项)，然而，若把电子运动方程写成

$$m\dot{\boldsymbol{v}}=\mathbf{K}=-\mu\dot{\boldsymbol{v}}+\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}+\cdots,$$

则可看出，m 和 μ(分别是力学质量和电磁质量）是不可能分割的，因为这方程亦能写成

$$(m+\mu)\dot{\boldsymbol{v}}=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}+\cdots. \qquad [30.15]$$

所以，$m+\mu$ 只不过是电子的总质量。

对于点电子($a=0$)，电磁质量 μ 为无限大。

补充书目

一般著作

M. Abraham and R. Becker, *The Classical Theory of Electricity and Magnetism* (Hafner, New York, 无日期).

J. Frenkel, *Lehrbuch der Elektrodynamik* (Berlin, 1926).

A. Sommerfeld, *Lectures on Theoretical Physics, Vol. 3: Electrodynamics* (Academic Press, New York, 1952).

H. A. Lorentz, *Vorlesungen über theoretische physik* (Leipzig, 1907).

H. A. Lorentz, Theorie der magneto-optischen Phänomene, *Encycl. math. Wiss.*, Vol. 5, part 3 (Leipzig, 1909-1926).

J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism* (Oxford, 1888; reprinted by Dover Publications, New York, 1954).

专门著作

H. A. Lorentz, *Theory of Electrons and its Applications to the*

Phenomena of Light and Radiant Heat (Leipzig, 1909; reprinted by Dover Publications, Now York, 1952).

J. LARMOR, *Aether and Matter*(Cambridge, 1900).

补充书目

R. BECKER, *Electromagnetic Fields and Interactions*, edited by F. Sauter(Blaisdell, New York, 1964), 2 vols. (代替 M. ABRAHAM and R. BECKER, *The Classical Theory of Electricity and Magnetism.*)

J. D. JACKSON, *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York, 1962).

L. D. LANDAU and E. M. LIFSHITZ, *Electrodynamics of Continuous Media*(Pergamon, New York, 1960).

W. K. H. PANOFSKY and M. PHILLIPS, *Classical Electricity and Magnetism*(Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962).

W. R. SMYTHE, *Static and Dynamic Electricity*(McGraw-Hill, New York, 1950).

J. A. STRATTON, *Electromagnetic Theory*(McGraw-Hill, New York, 1941).

附录. 英译本编者评注

[A-1] (§1, §26) 这些章节，虽然不是泡利本人的手笔，却反映了泡利对理论物理基本问题的极其深刻的信念。在他整个科学生涯中，他反复地表达了这些信念。这种看法可以从下面有关泡利著作中得到证实。(方括号中指的是 R. Kronig 和 V. F. Weisskopf 主编的《泡利科学论文集》(*Collected Scientific Papers by Wolfgang Pauli*) (John Wiley, New York, 1964) 中的卷号和页号)：

Verhandl. Deutsche Physik. Ges. **21**, 742—750 (1919) [第二卷，8—9 页].

Encyclopädie der mathematischen Wiss., vol. 5, Part. 2, B. G. Teubner(Leipzig, 1921), pp. 539—775[第一卷，237 页].

Scientia **59**, 65—76(1936)[第二卷，747—748].

Prix Nobel 1946, pp. 131—147(Stockholm, 1948)[第二卷, 1095 页].

Helv. Phys. Acta, Suppl. **4**, 261—267(1956)[第二卷, 1304—1306页].

Universitas **13**, 593—598(1958)[第二卷，1367 页].

[A-2](§7, §8, §9, §12) 物质的一般静电和静磁性质应是介电的和抗磁的，$\varepsilon>1$ 和 $\mu<1$。这从 ε，μ 与温度无关反映出来(半导体的抗磁性除外)，即，ε 和 μ 不是来源于统计的结果。这种情况对应于(§12 末尾)第二种相似性；并且，$\varepsilon-1>0$ 和 $(1/\mu)-1>0$ 表示使媒质极化必须作功。

第一种相似性(§12末尾)适用于分子的或原子的(但非永久的)电矩或磁矩情况；$\varepsilon-1>0$和$\mu-1>0$ 是由于在外场作用下取向一致，并再次表明使媒质极化必须作功。这里，ε 和 μ 来源于统计的结果，故与温度有关。

在永久电矩或磁矩的情况中，$\vec{P}$ 或 $\vec{M}$ 分别为 $\vec{E}$ 的非线性函数(铁电现象)或 $\vec{H}$ 的非线性函数(铁磁性，亚铁磁性，反铁磁性)。

[A-3] (§14, §15) 在侧面上 $\partial\varphi/\partial n=0$，在基面上 $\varphi=\varphi_1=$常数和

$\varphi=\varphi_1=$常数的稳态导体的边界值问题具有唯一的解φ；其证明与在静电问题所作的完全相同(§ 9 页)。

柱面对称时，φ与方位角(在§15中也是φ)无关，并且因$\sigma=$常数，故通过检验可证实$\varphi=-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{z}$，$\boldsymbol{E}=$恒量，是一个解。所以，$\boldsymbol{i}=$恒量。

[A-4](§30)　在对理论有益的一个新近贡献中，Rohrlich论及这里以及其它文献中所叙述的传统计算并不是协变的，所以[30.13]式不是电磁质量的正确表达式(F. Rohrlich, *Classical Charged Particles*, Addison-Wesley Publishing (Co. Reading, Mass., 1965)。根据Rohrlich(他的(6.21)式)，正确方法给出的结果是

$$P^{\alpha}_{自}=\mu v^{\alpha},$$

式中，$P^{\alpha}_{自}$是质点机械动量四矢量中的自相互作用部分，v^{α}是速度四矢量，而

$$\mu=\frac{E_{静电}}{c^2}。$$

由于此式满足爱因斯坦的质能关系，所以它比[30.1]式更加令人满意。

索　　引

(汉-英)

二　划

四　划

五　划

六　划

七 划

八 划

九 划

十 划

十一划

十二划

十 三 划

十 四 划